

(1)

A, B が 2 文字ずつあるから、求める場合の数は

$$\frac{7!}{2!2!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{2 \cdot 2} = 1260 \text{ (通り)}$$

となる。

(答) 1260 通り

(2)

C, D を 1 文字として考えた 6 文字の並べ方は

$$\frac{6!}{2!2!} = 180 \text{ (通り)}$$

であり、C, D の並べ方は 2 通りあるから、求める場合の数は

$$180 \times 2 = 360 \text{ (通り)}$$

となる。

(答) 360 通り

(3)

C, D, E の代わりに O を 3 つ用いた A, A, B, B, O, O, O の 7 個の文字の並べ方は

$$\frac{7!}{2!2!3!} = 210 \text{ (通り)}$$

である。この文字列の O を左から C, D, E の順に置き換えれば、題意の並べ方と同じものとなる。よって求める場合の数は 210 通りである。

(答) 210 通り

(1)

$$\begin{aligned}\frac{c+d}{a+b}-\frac{c}{a} &= \frac{a(c+d)-c(a+b)}{a(a+b)} \\ &= \frac{ac+ad-ac-bc}{a(a+b)} \\ &= \frac{ad-bc}{a(a+b)}\end{aligned}$$

となるが,

$$\begin{aligned}\frac{c}{a} &< \frac{d}{b} \\ \Leftrightarrow bc &< ad \quad (\because a, b, c, d > 0) \\ \therefore ad - bc &> 0\end{aligned}$$

であり, a, b, c, d は正の数であるから,

$$\begin{aligned}\frac{c+d}{a+b}-\frac{c}{a} &= \frac{ad-bc}{a(a+b)} > 0 \\ \Leftrightarrow \frac{c}{a} &< \frac{c+d}{a+b}\end{aligned}$$

となる。また,

$$\begin{aligned}\frac{d}{b}-\frac{c+d}{a+b} &= \frac{d(a+b)-b(c+d)}{b(a+b)} \\ &= \frac{ad+bd-bc-bd}{b(a+b)} \\ &= \frac{ad-bc}{b(a+b)} \\ &> 0 \\ \Leftrightarrow \frac{c+d}{a+b} &< \frac{d}{b}\end{aligned}$$

となるから

$$\frac{c}{a} < \frac{c+d}{a+b} < \frac{d}{b}$$

が示された。

(証明終)

(2)

$$\frac{c_n}{a_n} < \frac{d_n}{b_n} \quad \dots \textcircled{1}$$

がすべての自然数 n について成り立つことを, 数学的帰納法によって証明する。

[1] $n=1$ のとき,

(1)より①は成り立つ。

[2] $n=k$ のとき①が成り立つと仮定する。

漸化式から帰納的に考えると, すべての自然数 n について

$$a_n, b_n, c_n, d_n > 0$$

が成り立つ。よって,

$$\begin{aligned}\frac{c_k}{a_k} &< \frac{d_k}{b_k} \\ \Leftrightarrow a_k d_k - b_k c_k &> 0 \quad \dots \textcircled{2}\end{aligned}$$

となる。したがって,

$$\begin{aligned}\frac{d_{k+1}}{b_{k+1}} - \frac{c_{k+1}}{a_{k+1}} &= \frac{a_{k+1}d_{k+1} - b_{k+1}c_{k+1}}{a_{k+1}b_{k+1}} \\ &= \frac{(2a_k + b_k)(c_k + 2d_k) - (a_k + 2b_k)(2c_k + d_k)}{(2a_k + b_k)(a_k + 2b_k)} \\ &= \frac{3(a_k d_k - b_k c_k)}{(2a_k + b_k)(a_k + 2b_k)} \\ &> 0 \\ \Leftrightarrow \frac{c_{k+1}}{a_{k+1}} &< \frac{d_{k+1}}{b_{k+1}}\end{aligned}$$

となる。よって $n=k+1$ のときも①は成り立つ。

以上[1][2]より, すべての自然数 n について①が成り立つことが示された。

(証明終)

(3)

$$\begin{cases} a_{n+1} = 2a_n + b_n \\ b_{n+1} = a_n + 2b_n \end{cases} \quad \dots \textcircled{3}$$

の2式の両辺を足し, 整理すると

$$\begin{aligned}a_{n+1} + b_{n+1} &= 3(a_n + b_n) \\ &= 3^n(a_1 + b_1) \\ &= 3^n(a + b) \\ &= 3^{n+1}\end{aligned}$$

となり, 上式は $n=0$ としても成り立つから,

$$\therefore a_n + b_n = 3^n \quad \dots \textcircled{4}$$

となる。③の2式の両辺を引き, 整理すると

$$\begin{aligned}a_{n+1} - b_{n+1} &= a_n - b_n \\ &= a_1 - b_1 \\ &= a - b \\ &= 1 \\ \therefore a_n - b_n &= 1 \quad \dots \textcircled{5}\end{aligned}$$

となる。④, ⑤の両辺を足し, 整理すると

$$\begin{aligned}2a_n &= 3^n + 1 \\ \therefore a_n &= \frac{3^n + 1}{2}\end{aligned}$$

となる。

(答) $a_n = \frac{3^n + 1}{2}$

(1)

仮定より

$$\begin{aligned} |\vec{a}| &= |\vec{b}| = 1 \\ \vec{a} \cdot \vec{b} &= |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta = x \end{aligned}$$

となるから、

$$\begin{aligned} |\vec{c}|^2 &= |\vec{a} + \vec{b}|^2 \\ &= |\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 \\ &= 2 + 2x \end{aligned}$$

$$\therefore |\vec{c}| = \sqrt{2+2x}$$

となる。また、

$$\begin{aligned} |\vec{d}|^2 &= |-\vec{a} + 2\vec{b}|^2 \\ &= |\vec{a}|^2 - 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 4|\vec{b}|^2 \\ &= 5 - 4x \end{aligned}$$

$$\therefore |\vec{d}| = \sqrt{5-4x}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad |\vec{c}| = \sqrt{2+2x}, |\vec{d}| = \sqrt{5-4x}$$

(2)

$$\begin{aligned} \vec{c} \cdot \vec{d} &= (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (-\vec{a} + 2\vec{b}) \\ &= -|\vec{a}|^2 + \vec{a} \cdot \vec{b} + 2|\vec{b}|^2 \\ &= 1 + x \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \vec{c} \cdot \vec{d} = 1 + x$$

(3)

$\vec{c}$ と $\vec{d}$ のなす角が θ であるから、(2), (3)より

$$\begin{aligned} \vec{c} \cdot \vec{d} &= 1 + x \\ \Leftrightarrow x\sqrt{(2+2x)(5-4x)} &= 1 + x \quad \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

となる。ここで $0^\circ < \theta < 180^\circ$ より $-1 < x < 1$ であるから、上式より

$$\begin{aligned} 0 &< x\sqrt{(2+2x)(5-4x)} = 1 + x < 2 \\ \therefore 0 &< x < 1 \end{aligned}$$

がわかる。よって①式を2乗して整理すると

$$\begin{aligned} x^2(2+2x)(5-4x) &= (1+x)^2 \\ \Leftrightarrow 2x^2(5-4x) &= 1+x \quad (\because 1+x \neq 0) \\ \Leftrightarrow -8x^3 + 10x^2 &= 1+x \\ \Leftrightarrow 8x^3 - 10x^2 + x + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-1)(2x-1)(4x+1) &= 0 \\ \therefore x &= \frac{1}{2} \quad (\because 0 < x < 1) \end{aligned}$$

となる。ここから

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{1}{2} \\ \therefore \theta &= 60^\circ \quad (\because 0^\circ < \theta < 180^\circ) \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad 60^\circ$$

(1)

Cについて,

$$y' = 3x^2 + 2ax + 3$$

であるから、点Oにおける接線 l の方程式は

$$y = (3 \cdot 0^2 + 2a \cdot 0 + 3)x = 3x$$

となる。また、Oを通り l に垂直な直線 m の方程式は

$$y = -\frac{x}{3}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad l: y = 3x, \quad m: y = -\frac{x}{3}$$

(2)

Cの $x=t$ における接線の方程式は

$$y = (3t^2 + 2at + 3)(x - t) + t^3 + at^2 + 3t = (3t^2 + 2at + 3)x - 2t^3 - at^2$$

となる。これが $m: y = -\frac{x}{3}$ に一致するとき

$$\begin{cases} 3t^2 + 2at + 3 = -\frac{1}{3} & \dots\dots ① \\ -2t^3 - at^2 = 0 & \dots\dots ② \end{cases}$$

となる。①式より $t=0$ は不適であるから、 $t \neq 0$ となるので②式より

$$a = -2t \quad \dots\dots ③$$

となるので、これを①式に代入すると

$$3t^2 + 2(-2t)t + 3 = -\frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow t^2 = \frac{10}{3}$$

$$\therefore t = \pm \frac{\sqrt{30}}{3}$$

となる。よって③式より、求める a の値は

$$a = -2t = \pm \frac{2\sqrt{30}}{3}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad a = \pm \frac{2\sqrt{30}}{3}$$

(1)

$$l: y = \frac{1}{5}x + 4$$

となるから、 l と C の交点の x 座標は

$$\frac{x}{5} + 4 = |x(x-4)| \quad \dots \textcircled{1}$$

の実数解となる。絶対値を外すため、場合分けをして式を解く。

[1] $x < 0, x > 4$ の場合

$x(x-4) > 0$ より、 $\textcircled{1}$ から

$$\frac{x}{5} + 4 = x(x-4)$$

$$\Leftrightarrow 5x^2 - 21x - 20 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-5)(5x+4) = 0$$

$$\therefore x = 5, -\frac{4}{5}$$

となる。

[2] $0 \leq x \leq 4$ の場合

$x(x-4) \leq 0$ より、 $\textcircled{1}$ から

$$\frac{x}{5} + 4 = -x(x-4)$$

$$\Leftrightarrow 5x^2 - 19x + 20 = 0$$

となるが、この2次方程式の判別式 D は

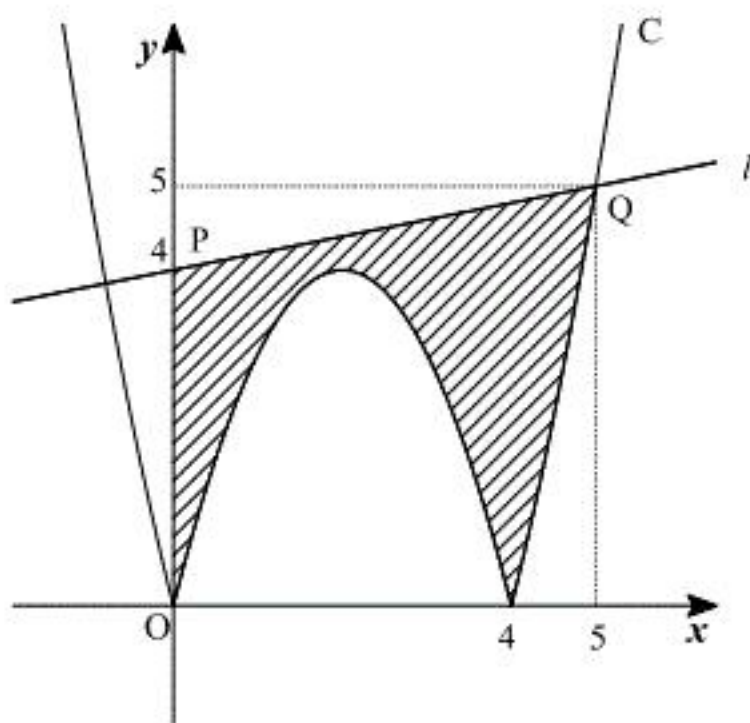
$$D = 19^2 - 4 \cdot 5 \cdot 20 = -39 < 0$$

となるから、実数解をもたない。

以上[1],[2]より、 C, l は $x = -\frac{4}{5}, 5$ で交点を持つことがわかる。 Q は第1象限の点であるから、その座標は $(5, 5)$ となる。

(答) $(5, 5)$

(2)



上図斜線部の面積を求めればよい。よって

$$\begin{aligned} & \int_0^4 \left\{ \frac{x}{5} + 4 + x(x-4) \right\} dx + \int_4^5 \left\{ \frac{x}{5} + 4 - x(x-4) \right\} dx \\ &= \int_0^5 \left(\frac{x}{5} + 4 \right) dx + \int_0^4 x(x-4) dx - \int_4^5 x(x-4) dx \\ &= \left[\frac{x^2}{10} + 4x \right]_0^5 + \left[\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 \right]_0^4 - \left[\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 \right]_4^5 \\ &= \frac{19}{2} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{19}{2}$