

$\cos \theta = x$ とおくと,

$$\begin{aligned} |\vec{a}| &= |\vec{b}| = 1 \\ \vec{a} \cdot \vec{b} &= |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta = x \end{aligned}$$

となるから,

$$\begin{aligned} |\vec{c}|^2 &= |\vec{a} + \vec{b}|^2 \\ &= |\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 \\ &= 2 + 2x \end{aligned}$$

$$\therefore |\vec{c}| = \sqrt{2+2x}$$

となる。また,

$$\begin{aligned} |\vec{d}|^2 &= |-\vec{a} + 2\vec{b}|^2 \\ &= |\vec{a}|^2 - 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 4|\vec{b}|^2 \\ &= 5 - 4x \end{aligned}$$

$$\therefore |\vec{d}| = \sqrt{5-4x}$$

となる。また,

$$\begin{aligned} \vec{c} \cdot \vec{d} &= (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (-\vec{a} + 2\vec{b}) \\ &= -|\vec{a}|^2 + \vec{a} \cdot \vec{b} + 2|\vec{b}|^2 \\ &= 1 + x \end{aligned}$$

となる。よって,

$$\begin{aligned} \vec{c} \cdot \vec{d} &= 1 + x \\ \Leftrightarrow |\vec{c}| |\vec{d}| x &= 1 + x \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow x\sqrt{(2+2x)(5-4x)} = 1+x \quad \dots \textcircled{1}$$

となる。ここで $0^\circ < \theta < 180^\circ$ より $-1 < x < 1$ であるから, 上式より

$$\begin{aligned} 0 < x\sqrt{(2+2x)(5-4x)} &= 1+x < 2 \\ \therefore 0 < x < 1 \end{aligned}$$

がわかる。よって①式を2乗して整理すると

$$\begin{aligned} x^2(2+2x)(5-4x) &= (1+x)^2 \\ \Leftrightarrow 2x^2(5-4x) &= 1+x (\because 1+x \neq 0) \\ \Leftrightarrow -8x^3 + 10x^2 &= 1+x \\ \Leftrightarrow 8x^3 - 10x^2 + x + 1 & \\ \Leftrightarrow (x-1)(2x-1)(4x+1) &= 0 \\ \therefore x = \frac{1}{2} (\because 0 < x < 1) \end{aligned}$$

となる。これから

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{1}{2} \\ \therefore \theta &= 60^\circ (\because 0^\circ < \theta < 180^\circ) \end{aligned}$$

となる。

(1)

仮定より $a, b > 0$ である。 $x + y + z = 4$ より

$$a + z = 4 \Leftrightarrow a = 4 - z$$

となる。また、

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} &= 4 \\ \Leftrightarrow \frac{x+y}{xy} + \frac{1}{z} &= 4 \\ \Leftrightarrow \frac{a}{b} + \frac{1}{z} &= 4 \\ \Leftrightarrow \frac{a}{b} &= \frac{4z-1}{z} \end{aligned}$$

となるが、左辺が正であるため $4z-1 \neq 0$ なので、

$$b = \frac{az}{4z-1} = \frac{z(4-z)}{4z-1}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad (a, b) = \left(4-z, \frac{z(4-z)}{4z-1} \right)$$

(2)

x, y を実数解に持つ t の 2 次方程式は、解と係数の関係より

$$t^2 - at + b = 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

となる。 a, b は (1) より z のみで表されるから、 $\textcircled{1}$ 式が実数解をもち、またそのすべてが正となるような z の範囲を求めればよい。 $f(t) = t^2 - at + b$ とおくと、 $\textcircled{1}$ 式が正の実数解をもつ条件は

$$\begin{cases} f(t) \text{ の軸の位置} > 0 & \dots \textcircled{2} \\ f(0) > 0 & \dots \textcircled{3} \\ \text{判別式 } D \geq 0 & \dots \textcircled{4} \end{cases}$$

となる。 $\textcircled{2}$ について、軸の方程式は $t = \frac{a}{2}$ であるから

$$\begin{aligned} \frac{a}{2} &> 0 \\ \Leftrightarrow \frac{4-z}{2} &> 0 \\ z &< 4 & \dots \textcircled{5} \end{aligned}$$

となる。 $\textcircled{3}$ について、

$$\begin{aligned} f(0) &= b > 0 \\ \Leftrightarrow \frac{z(4-z)}{4z-1} &> 0 \end{aligned}$$

となるが、 $z > 0$ と $\textcircled{5}$ より

$$\begin{aligned} 4z-1 &> 0 \\ \Leftrightarrow z &> \frac{1}{4} & \dots \textcircled{6} \end{aligned}$$

となる。 $\textcircled{4}$ について、 $D = a^2 - 4b$ であるから、(1) より

$$\begin{aligned} D &\geq 0 \\ \Leftrightarrow (4-z)^2 - \frac{4z(4-z)}{4z-1} &\geq 0 \\ \Leftrightarrow 4-z - \frac{4z}{4z-1} &\geq 0 \quad (\because 4-z > 0) \\ \Leftrightarrow (4-z)(4z-1) - 4z &\geq 0 \quad (\because 4z-1 > 0) \\ \Leftrightarrow -4z^2 + 13z - 4 &\geq 0 \\ \Leftrightarrow \frac{13-\sqrt{105}}{8} \leq z \leq \frac{13+\sqrt{105}}{8} & \dots \textcircled{7} \end{aligned}$$

となる。

$$10 < \sqrt{105} < 11$$

であるので、 $\textcircled{5} \sim \textcircled{7}$ より、求める範囲は

$$\frac{13-\sqrt{105}}{8} \leq z \leq \frac{13+\sqrt{105}}{8}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{13-\sqrt{105}}{8} \leq z \leq \frac{13+\sqrt{105}}{8}$$

(1)

$g(x) = e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}$ とおくと, $x > 0$ のとき $g(x) > 0$ となることを示せばよい。

$$g'(x) = e^x - 1 - x$$

$$g''(x) = e^x - 1$$

となるので, $x > 0$ のとき $g''(x) > 0$ であり, $g'(0) = 0$ であるから, $x > 0$ のとき $g'(x) > 0$ となる。また $g(0) = 0$ であるから, $x > 0$ のとき $g(x) > 0$ となるので, $x > 0$ のとき

$$e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2} \quad \dots \textcircled{1}$$

となることが示された。

(証明終)

$$f(x) = (a - x^2)e^{-\frac{x^2}{2}} = ae^{-\frac{x^2}{2}} - x^2e^{-\frac{x^2}{2}}$$

であり,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} ae^{-\frac{x^2}{2}} = 0 \quad \dots \textcircled{2}$$

となる。 $x \rightarrow \infty$ について考えるから, $x > 0$ としてよい。①式と $x > 0$ から

$$0 < x^2e^{-\frac{x^2}{2}} < (2 + 2x + x^2)e^{-\frac{x^2}{2}} < 2e^x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} = 2e^{-\frac{x^2}{2} + x} \quad \dots \textcircled{3}$$

となるが, $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(-\frac{x^2}{2} + x\right) = -\infty$ より

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-\frac{x^2}{2} + x} = 0$$

となるから, ③式よりはさみうちの原理から

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2e^{-\frac{x^2}{2}} = 0 \quad \dots \textcircled{4}$$

となる。よって②, ④より

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$$

が示された。

(証明終)

(2)

$f(x)$ が $-1 < x < 2$ においてちょうど2個の極値をもつには, $f'(x) = 0$ が2つ以上の解をもつことが必要である。ここで

$$f'(x) = -2xe^{-\frac{x^2}{2}} - x(a - x^2)e^{-\frac{x^2}{2}} = \{x^3 - (a + 2)x\}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

となり, $e^{-\frac{x^2}{2}} > 0$ であるから,

$$f'(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^3 - (a + 2)x = 0$$

$$\Leftrightarrow x\{x^2 - (a + 2)\} = 0$$

となる。これが2つ以上の解をもつには $a + 2 > 0$ が必要である。このとき, 区間 $f(x)$ の増減表は以下ようになる。

x	...	$-\sqrt{a+2}$	...	0	...	$\sqrt{a+2}$	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	$-2e^{-\frac{a+2}{2}}$	$\nearrow$	a	$\searrow$	$-2e^{-\frac{a+2}{2}}$	$\nearrow$

よって, $f(x)$ が $-1 < x < 2$ においてちょうど2個の極値をもつ条件は,

$$-\sqrt{a+2} \leq -1 \text{ かつ } \sqrt{a+2} < 2$$

$$\Leftrightarrow -1 \leq a < 2$$

となる。

(答) $-1 \leq a < 2$

(3)

(1)より $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ であり, $f(-x) = f(x)$ であるから $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ も成り立つ。このことと

(2)の増減表より, $-1 \leq a < 0$ のとき最大値はなし, $0 \leq a < 2$ のとき最大値は a となる。また,

最小値は $-2e^{-\frac{a+2}{2}}$ となる。

(答) 最大値: $-1 \leq a < 0$ のときなし, $0 \leq a < 2$ のとき a , 最小値: $-2e^{-\frac{a+2}{2}}$

(1)

仮定より

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{7^n} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{3}{2} \cdot \left(-\frac{1}{7} \right)^n + \frac{5}{2} \cdot \left(\frac{1}{7} \right)^n \right\} \\
 &= \frac{3}{2} \cdot \left(-\frac{1}{7} \right) \cdot \frac{1}{1 - \left(-\frac{1}{7} \right)} + \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{7}} \\
 &= -\frac{3}{16} + \frac{5}{12} \\
 &= \frac{11}{48}
 \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{11}{48}$

(2)

 $0 \leq b_n \leq 6$ から、自然数 m を用いて

$$0 \leq \sum_{n=m}^{\infty} \frac{b_n}{7^n} \leq \sum_{n=m}^{\infty} \frac{6}{7^n} = \frac{6}{7^m} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{7}} = \frac{1}{7^{m-1}} \quad \cdots \textcircled{1}$$

となる。 b_1 について、 $b_1 \geq 0$ から

$$\begin{aligned}
 0 \leq \frac{b_1}{7} &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{7^n} = \frac{3}{8} \\
 \Leftrightarrow 0 \leq b_1 &\leq \frac{21}{8}
 \end{aligned}$$

であり、①より

$$\begin{aligned}
 \frac{b_1}{7} &= \frac{3}{8} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{b_n}{7^n} \geq \frac{3}{8} - \frac{1}{7} = \frac{13}{56} \\
 \Leftrightarrow b_1 &\geq \frac{13}{8}
 \end{aligned}$$

となるから、

$$\frac{13}{8} \leq b_1 \leq \frac{21}{8}$$

となる。 b_1 は整数であるから、

$$b_1 = 2$$

とわかる。ここから

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{b_n}{7^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{7^n} - \frac{b_1}{7} = \frac{3}{8} - \frac{2}{7} = \frac{5}{56}$$

となる。 $b_2 \geq 0$ より

$$\begin{aligned}
 0 \leq \frac{b_2}{49} &\leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{b_n}{7^n} = \frac{5}{56} \\
 \Leftrightarrow 0 \leq b_2 &\leq \frac{35}{8}
 \end{aligned}$$

となり、①から

$$\begin{aligned}
 \frac{b_2}{49} &= \frac{5}{56} - \sum_{n=3}^{\infty} \frac{b_n}{7^n} \geq \frac{5}{56} - \frac{1}{49} = \frac{27}{7 \cdot 7 \cdot 8} \\
 \Leftrightarrow b_2 &\geq \frac{27}{8}
 \end{aligned}$$

となるから、

$$\frac{27}{8} \leq b_2 \leq \frac{35}{8}$$

となる。 b_2 は整数であるから、

$$b_2 = 4$$

とわかる。 $b_1 = 2, b_2 = 4$ であるから、

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{b_n}{7^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{7^n} - \frac{2}{7} - \frac{4}{49} = \frac{3}{7 \cdot 7 \cdot 8}$$

となる。ここで、 $n = k + 2$ とおき上式に代入すると

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_{k+2}}{7^{k+2}} &= \frac{3}{7 \cdot 7 \cdot 8} \\
 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_{k+2}}{7^k} &= \frac{3}{8}
 \end{aligned}$$

となるから、 b_1 を求めた時と同様にして

$$b_3 = 2$$

と求まる。よって、

$$b_1 = 2, b_2 = 4, b_3 = 2$$

となるから、

$$b_n = 3 + (-1)^n \quad \cdots \textcircled{2}$$

となることが予想される。②式がすべての自然数 n について成り立つことを数学的帰納法によって証明する。[1] $n = 1, 2, 3$ において、②式は成り立つ。[2] $n \leq 2l$ (l は自然数) において②式が成り立つと仮定したとき、

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=1}^{2l} \frac{b_n}{7^n} &= \sum_{n=1}^{2l} \frac{3 + (-1)^n}{7^n} \\
 &= \frac{3}{7} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{7} \right)^{2l}}{1 - \frac{1}{7}} - \frac{1}{7} \cdot \frac{1 - \left(-\frac{1}{7} \right)^{2l}}{1 - \left(-\frac{1}{7} \right)} \\
 &= \frac{3}{8} - \frac{3}{8} \left(\frac{1}{49} \right)^l
 \end{aligned}$$

となるから、

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=2l+1}^{\infty} \frac{b_n}{7^n} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{7^n} - \sum_{n=1}^{2l} \frac{b_n}{7^n} \\
 &= \frac{3}{8} \left(\frac{1}{49} \right)^l
 \end{aligned}$$

となるので、 $n = i + 2l$ として上式に代入すると

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{b_{i+2l}}{7^{j+2l}} &= \frac{3}{8} \left(\frac{1}{49} \right)^l \\
 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_{i+2l}}{7^i} &= \frac{3}{8}
 \end{aligned}$$

となる。よって b_1, b_2 を求めた方法と同様にして

$$b_{2l+1} = 2, b_{2l+2} = 4$$

とわかる。よって $n = 2l + 1, 2l + 2$ においても②式が成り立つことがわかる。以上[1][2]より、すべての自然数 n において

$$b_n = 3 + (-1)^n$$

が成り立つことが示された。

(答) $b_1 = 2, b_2 = 4, b_3 = 2, b_n = 3 + (-1)^n$

(1)

与式の両辺を x で微分すると

$$\sqrt{1+(f'(x))^2} = e^{-x} + f'(x)$$

となるから、両辺を 2 乗して整理すると

$$\begin{aligned} 1+(f'(x))^2 &= (e^{-x} + f'(x))^2 \\ \Leftrightarrow 1+(f'(x))^2 &= e^{-2x} + 2e^{-x}f'(x) + (f'(x))^2 \\ \Leftrightarrow f'(x) &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} \end{aligned}$$

となる。よって、積分定数を C とすると

$$f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} + C \quad \dots \textcircled{1}$$

となる。ここで、与式に $x=0$ を代入すると

$$\begin{aligned} 0 &= -1 + f(0) \\ \Leftrightarrow f(0) &= 1 \end{aligned}$$

となるから、 $\textcircled{1}$ 式より

$$\begin{aligned} f(0) &= 1 \\ \Leftrightarrow 1 + C &= 1 \\ \therefore C &= 0 \end{aligned}$$

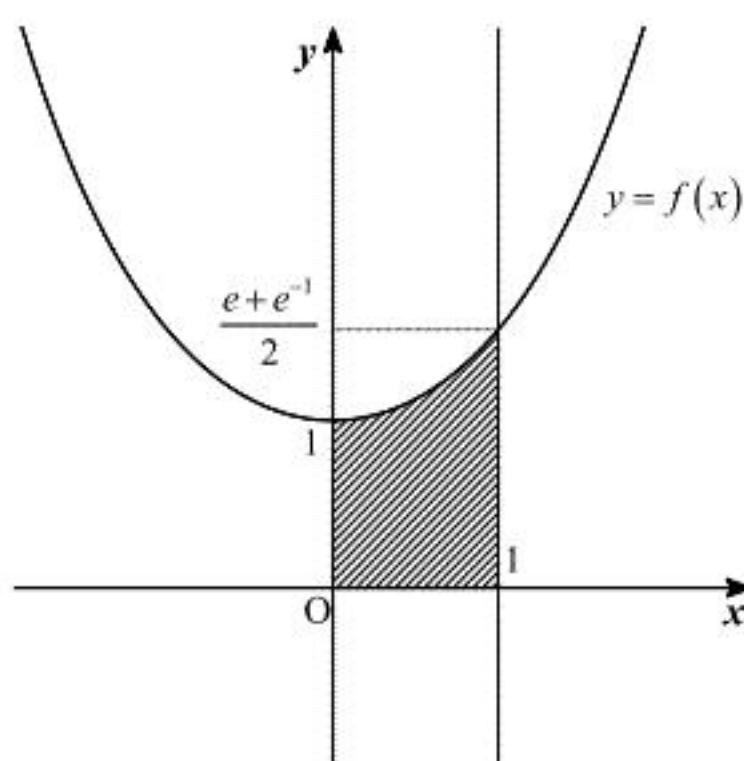
となる。よって

$$f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

(2)



上図斜線部の領域を y 軸の周りに回転させた立体の体積を求めればよい。よって求める体積を V とすると

$$\begin{aligned} V &= \pi \cdot 1^2 \cdot f(1) - \pi \int_1^{\frac{e+e^{-1}}{2}} x^2 dy \\ &= \pi f(1) - \pi \int_0^1 x^2 f'(x) dx \\ &= \pi f(1) - \pi \left[x^2 f(x) \right]_0^1 + 2\pi \int_0^1 x f(x) dx \\ &= 2\pi \int_0^1 x f(x) dx \end{aligned}$$

となる。ここで、(1)より $f(x) = \{f'(x)\}'$ であるから

$$\begin{aligned} \int_0^1 x f(x) dx &= \int_0^1 x \{f'(x)\}' dx \\ &= \left[x f'(x) \right]_0^1 - \int_0^1 f'(x) dx \\ &= f'(1) - f(1) + f(0) \end{aligned}$$

となる。また、

$$\begin{aligned} f(1) &= \frac{e + e^{-1}}{2} \\ f(0) &= 1 \\ f'(1) &= \frac{e - e^{-1}}{2} \end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \left\{ \frac{e - e^{-1} - (e + e^{-1})}{2} + 1 \right\} \\ &= 2\pi(1 - e^{-1}) \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad 2\pi(1 - e^{-1})$$