

1

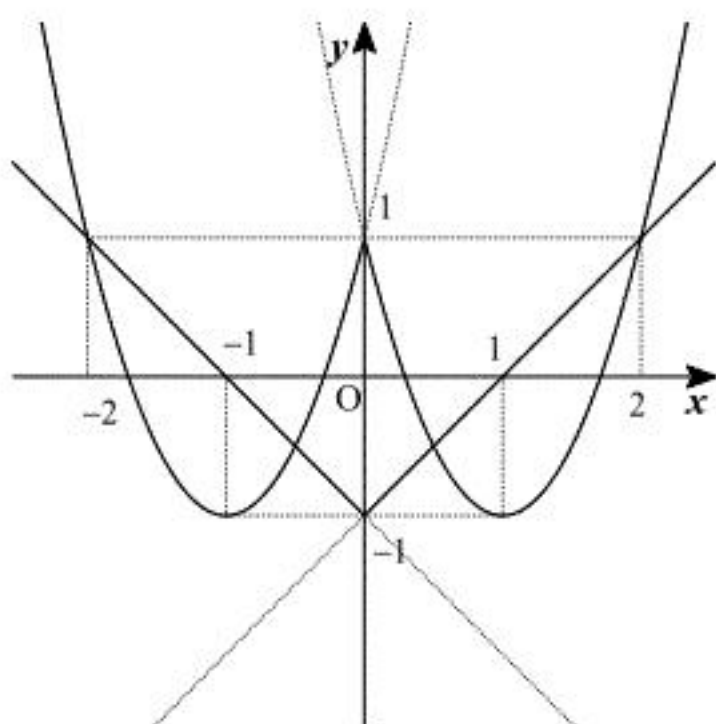
(1)

$a=1$ のとき,

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 4x + 1 = 2(x+1)^2 - 1 & (x < 0) \\ 2x^2 - 4x + 1 = 2(x-1)^2 - 1 & (0 \leq x) \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} -x-1 & (x < 0) \\ x-1 & (0 \leq x) \end{cases}$$

となる。よって、以下のようなグラフになる。



(答) 上図

(2)

$y=f(x)$, $y=g(x)$ はともに y 軸に対して対称であるから, $x=0$ で共有点を持たず, $x>0$ で1つ共有点を持てばよい。 $x=0$ で共有点を持たない条件は $a \neq 0$ である。 $x>0$ で1つ共有点を持つには, 連立して

$$\begin{aligned} 2x^2 - 4x + a &= x - a \\ \Leftrightarrow 2x^2 - 5x + 2a &= 0 \quad \cdots \text{①} \end{aligned}$$

となるが, これが正の実数解をただ1つ持てば良い。①の解を α, β とすると,

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= \frac{5}{2} > 0 \\ \alpha\beta &= a > 0 \end{aligned}$$

が成り立つから, ①が実数解を持つとき, それらは正である。したがって, ①が正の実数解をただ1つ持つには, ①が重解を持つことが必要十分である。①の判別式を D とすると,

$$D = 5^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2a = 25 - 16a$$

となる。これが0となるから, 求める a の値は,

$$a = \frac{25}{16}$$

である。

(答) $a = \frac{25}{16}$

(3)

①の解が $1 \leq x \leq 3$ であればよい。①が実数解を持つので,

$$\begin{aligned} D &\geq 0 \\ \Leftrightarrow a &\leq \frac{25}{16} \end{aligned}$$

を満たす。このとき, ①の解は,

$$\begin{aligned} 2x^2 - 5x + 2a &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16a}}{4} \end{aligned}$$

となる。これが, $1 \leq x \leq 3$ を満たすとき,

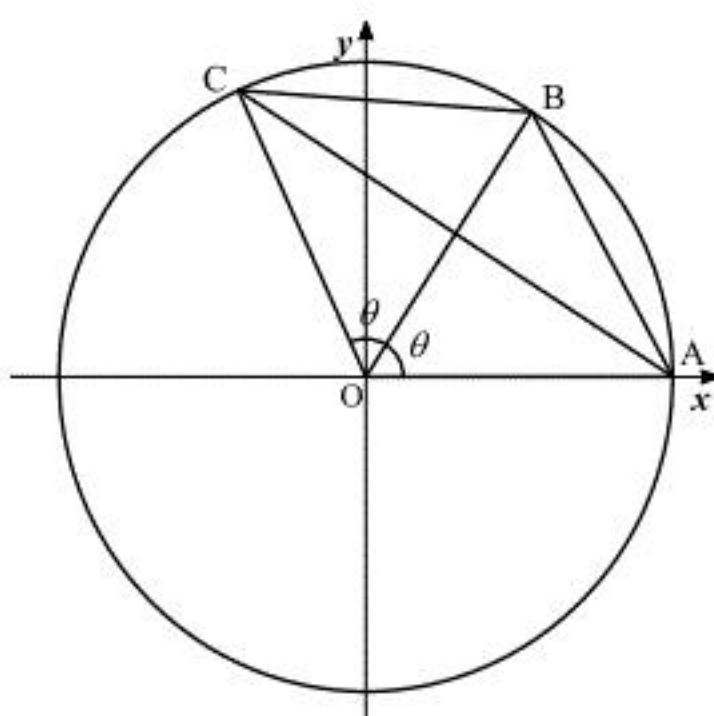
$$\begin{aligned} \frac{5 - \sqrt{25 - 16a}}{4} &\geq 1 \\ \Leftrightarrow \sqrt{25 - 16a} &\leq 1 \\ \Leftrightarrow 16a &\geq 24 \\ \Leftrightarrow a &\geq \frac{3}{2} \end{aligned}$$

となる。このとき, $\frac{5 + \sqrt{25 - 16a}}{4} \leq \frac{5 + 1}{4} = \frac{3}{2} < 3$ を満たす。以上から, $\frac{3}{2} \leq a \leq \frac{25}{16}$ であればよい。

(答) $\frac{3}{2} \leq a \leq \frac{25}{16}$

$0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}$ の場合と $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ の場合に場合分けする。

[1] $0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}$ のとき



上図のようになるから、 $\triangle ABC$ の面積は、 $\triangle OAB$ の面積と $\triangle OBC$ の面積の和から $\triangle OAC$ の面積を引いたものである。 $\triangle OAB$ の面積は、

$$\frac{1}{2} \cdot OA \cdot OB \cdot \sin \theta = \frac{\sin \theta}{2}$$

である。 $\triangle OBC$ の面積も同様である。また、 $\triangle OAC$ の面積は、

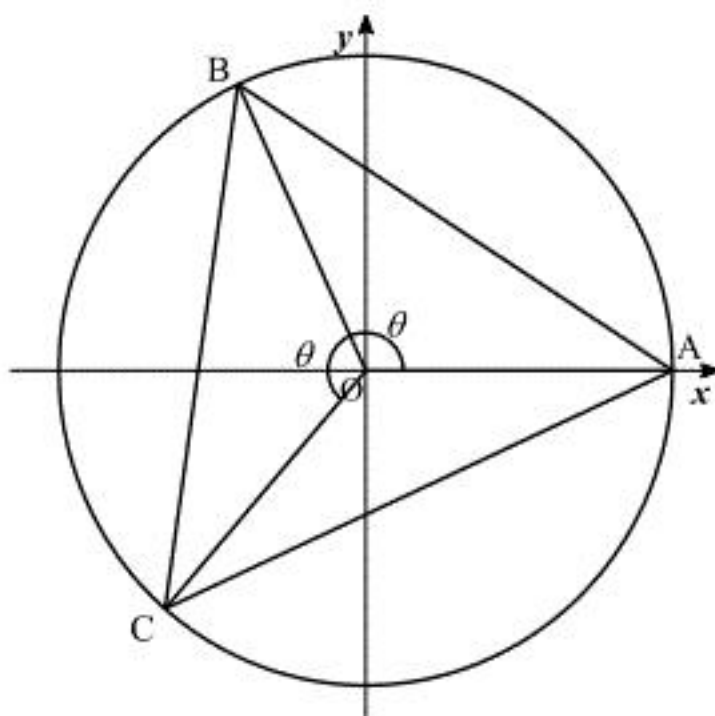
$$\frac{1}{2} \cdot OA \cdot OC \cdot \sin 2\theta = \frac{\sin 2\theta}{2}$$

である。よって、 $\triangle ABC$ の面積は、

$$\frac{\sin \theta}{2} \cdot 2 - \frac{\sin 2\theta}{2} = \sin \theta - \frac{\sin 2\theta}{2}$$

となる。

[2] $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ のとき



上図のようになるから、 $\triangle ABC$ の面積は、 $\triangle OAB$ 、 $\triangle OBC$ 、 $\triangle OAC$ の面積の和である。 $\triangle OAB$ 、 $\triangle OBC$ の面積は[1]と同様である。また、 $\triangle OAC$ の面積は

$$\frac{1}{2} \cdot OA \cdot OC \cdot \sin(2\pi - 2\theta) = -\frac{\sin 2\theta}{2}$$

である。よって、 $\triangle ABC$ の面積は

$$\frac{\sin \theta}{2} \cdot 2 + \left(-\frac{\sin 2\theta}{2}\right) = \sin \theta - \frac{\sin 2\theta}{2}$$

となる。

以上[1], [2]より、いずれの場合も $\triangle ABC$ の面積は $\sin \theta - \frac{\sin 2\theta}{2}$ である。 $f(\theta) = \sin \theta - \frac{\sin 2\theta}{2}$

とすると、

$$\begin{aligned} f'(\theta) &= \cos \theta - \cos 2\theta \\ &= -2\cos^2 \theta + \cos \theta + 1 \\ &= (-2\cos \theta - 1)(\cos \theta - 1) \end{aligned}$$

である。よって、 $0 < \theta < \pi$ に注意すると、

$$\begin{aligned} f'(\theta) &= 0 \\ \Leftrightarrow \cos \theta &= -\frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow \theta &= \frac{2}{3}\pi \end{aligned}$$

となるから、 $f(\theta)$ の増減表は以下のようになる。

θ	0	...	$\frac{2}{3}\pi$	...	π
$f'(\theta)$	$\times$	+	0	-	$\times$
$f(\theta)$	$\times$	$\nearrow$		$\searrow$	$\times$

増減表から、 $\theta = \frac{2}{3}\pi$ で最大値をとり、その値は

$$f\left(\frac{2}{3}\pi\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

である。

(答) 面積 $\sin \theta - \frac{\sin 2\theta}{2}$

最大値 $\frac{3\sqrt{3}}{4} \left(\theta = \frac{2}{3}\pi \right)$

(1)

$$\begin{aligned}
 R_1 &= \int_0^a \frac{dx}{(1-x)^2} = \left[\frac{1}{1-x} \right]_0^a = \frac{1}{1-a} - 1 = \frac{a}{1-a} \\
 R_2 &= 2 \int_0^a \frac{a-x}{(1-x)^3} dx \\
 &= \int_0^a (a-x) \left\{ \frac{1}{(1-x)^2} \right\}' dx \\
 &= \left[\frac{a-x}{(1-x)^2} \right]_0^a + \int_0^a \frac{dx}{(1-x)^2} \\
 &= -a + \frac{a}{1-a} \\
 &= \frac{a^2}{1-a}
 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) R_1 = \frac{a}{1-a}, R_2 = \frac{a^2}{1-a}$$

(2)

$R_n = \frac{a^n}{1-a}$ となることを数学的帰納法より示す。

[1] $n=1$ のとき

(1)から $R_1 = \frac{a}{1-a}$ となり確かに $R_n = \frac{a^n}{1-a}$ を満たす。

[2] $n=k+1$ のとき

$n=k$ において、 $R_k = \frac{a^k}{1-a}$ が成り立つと仮定する。このとき、

$$\begin{aligned}
 R_{k+1} &= (k+1) \int_0^a \frac{(a-x)^k}{(1-x)^{k+2}} dx \\
 &= \int_0^a (a-x)^k \left\{ \frac{1}{(1-x)^{k+1}} \right\}' dx \\
 &= \left[\frac{(a-x)^k}{(1-x)^{k+1}} \right]_0^a + k \int_0^a \frac{(a-x)^{k-1}}{(1-x)^{k+1}} dx \\
 &= -a^k + R_k \\
 &= -a^k + \frac{a^k}{1-a} \\
 &= \frac{a^{k+1}}{1-a}
 \end{aligned}$$

となり、 $n=k+1$ でも条件を満たす。

以上[1], [2]から数学的帰納法より、 $R_n = \frac{a^n}{1-a}$ が示せた。

$$(\text{答}) R_n = \frac{a^n}{1-a}$$

(3)

(2)より $R_n = \frac{a^n}{1-a}$ であるから、

$$\sum_{n=1}^N R_n = \sum_{n=1}^N \frac{a^n}{1-a} = \frac{a}{1-a} \cdot \frac{1-a^N}{1-a}$$

であり、

$$\sum_{n=1}^{\infty} R_n = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N R_n = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{a}{1-a} \cdot \frac{1-a^N}{1-a} = \frac{a}{(1-a)^2}$$

となる。

$$(\text{答}) \frac{a}{(1-a)^2}$$

(1)

A 君が3個の石を取り出すとき、その出し方は

$${}_8C_3 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 56$$

となり、56通りである。このうち、1個の白の石と2個の黒の石を取り出す場合の数は

$${}_4C_1 \cdot {}_4C_2 = 4 \cdot 6 = 24$$

となり、24通りである。よって、求める確率は $\frac{24}{56} = \frac{3}{7}$ となる。

(答) $\frac{3}{7}$

(2)

試行後に白の石と黒の石の個数が同数になるのは、

A 君が3個の白の石、B 君が3個の黒の石を出す場合

A 君が2個の白の石と1個の黒の石、B 君が1個の白の石と2個の黒の石を出す場合

A 君が1個の白の石と2個の黒の石、B 君が2個の白の石と1個の黒の石を出す場合

A 君が3個の黒の石、B 君が3個の白の石を出す場合

のいずれかである。それぞれ場合分けして考える。A 君、B 君ともに、8個の石の中から3個取り出すから、取り出し方の総数はそれぞれ

$${}_8C_3 = 56$$

より、56通りである。

[1] A 君が3個の白の石、B 君が3個の黒の石を出す場合

A 君が白の石3個を取り出す場合の数は

$${}_4C_3 = 4$$

より、4通りである。その後、B 君が3個の黒の石を取り出す場合の数は

$${}_3C_3 = 10$$

となり、10通りである。よって、この場合の確率は

$$\frac{4}{56} \cdot \frac{10}{56} = \frac{5}{392}$$

である。

[2] A 君が2個の白の石と1個の黒の石、B 君が1個の白の石と2個の黒の石を出す場合

A 君が2個の白の石と1個の黒の石を取り出す場合の数は

$${}_4C_2 \cdot {}_4C_1 = 6 \cdot 4 = 24$$

より、24通りである。その後、B 君が1個の白の石と2個の黒の石を取り出す場合の数は

$${}_4C_1 \cdot {}_4C_2 = 4 \cdot 6 = 24$$

となり、24通りである。よって、この場合の確率は

$$\frac{24}{56} \cdot \frac{24}{56} = \frac{9}{49}$$

である。

[3] A 君が1個の白の石と2個の黒の石、B 君が2個の白の石と1個の黒の石を出す場合

A 君が1個の白の石と2個の黒の石を取り出す場合の数は

$${}_4C_1 \cdot {}_4C_2 = 4 \cdot 6 = 24$$

より、24通りである。その後、B 君が2個の白の石と1個の黒の石を取り出す場合の数は

$${}_3C_2 \cdot {}_3C_1 = 10 \cdot 3 = 30$$

となり、30通りである。よって、この場合の確率は

$$\frac{24}{56} \cdot \frac{30}{56} = \frac{45}{196}$$

である。

[4] A 君が3個の黒の石、B 君が3個の白の石を出す場合

A 君が黒の石3個を取り出す場合の数は

$${}_4C_3 = 4$$

より、4通りである。その後、B 君が3個の白の石を取り出す場合の数は

$${}_6C_3 = 20$$

となり、20通りである。よって、この場合の確率は

$$\frac{4}{56} \cdot \frac{20}{56} = \frac{5}{196}$$

である。

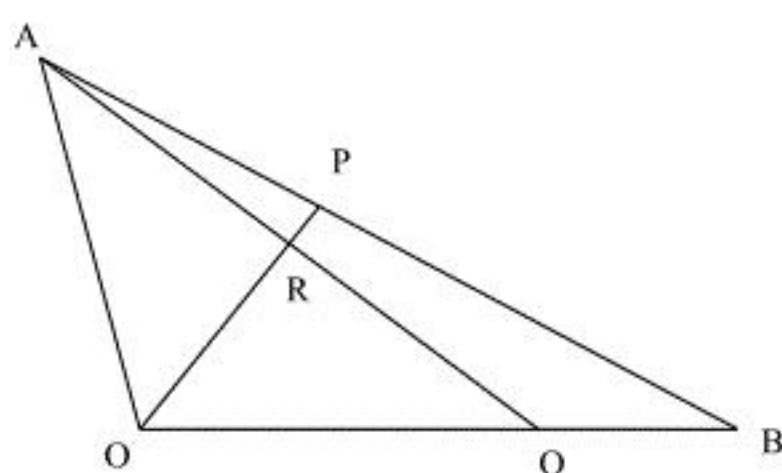
以上[1], [2], [3], [4]から求める確率は

$$\frac{5}{392} + \frac{9}{49} + \frac{45}{196} + \frac{5}{196} = \frac{177}{392}$$

となる。

(答) $\frac{177}{392}$

(1)



P は辺 AB を 2:3 に内分する点であるから,

$$\overrightarrow{OP} = \frac{3\vec{a} + 2\vec{b}}{5}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{OP} = \frac{3\vec{a} + 2\vec{b}}{5}$$

(2)

$\triangle OAB$ において余弦定理を用いて,

$$\begin{aligned} \cos \angle AOB &= \frac{OA^2 + OB^2 - AB^2}{2OA \cdot OB} \\ &= \frac{2^2 + 3^2 - 4^2}{2 \cdot 2 \cdot 3} \\ &= -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

となる。よって,

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \angle AOB \\ &= 2 \cdot 3 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) \\ &= -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad -\frac{3}{2}$$

(3)

$\overrightarrow{OQ} = k\vec{b}$ とすると, $\overrightarrow{AQ} = -\vec{a} + k\vec{b}$ である。よって,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{AQ} &= \frac{3\vec{a} + 2\vec{b}}{5} \cdot (-\vec{a} + k\vec{b}) \\ &= -\frac{3}{5}|\vec{a}|^2 + \frac{3k-2}{5}\vec{a} \cdot \vec{b} + \frac{2}{5}k|\vec{b}|^2 \\ &= -\frac{3}{5} \cdot 2^2 + \frac{3k-2}{5} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) + \frac{2}{5}k \cdot 3^2 \\ &= \frac{27}{10}k - \frac{9}{5} \end{aligned}$$

である。 $\overrightarrow{OP}$ と $\overrightarrow{AQ}$ は垂直に交わるので, $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{AQ} = 0$ である。よって, $k = \frac{2}{3}$ である。これから, $OQ:QB = 2:1$ となる。

$$(\text{答}) \quad OQ:QB = 2:1$$

(4)

$\overrightarrow{OR} = l\overrightarrow{OP}$ とすると, $\overrightarrow{OR} = \frac{3l}{5}\vec{a} + \frac{2l}{5}\vec{b}$ である。また, $AR:RQ = m:1-m$ とすると,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OR} &= m\overrightarrow{OQ} + (1-m)\overrightarrow{OA} \\ &= (1-m)\vec{a} + \frac{2m}{3}\vec{b} \end{aligned}$$

である。 $\vec{a}$ と $\vec{b}$ は一次独立であるので,

$$\begin{cases} \frac{3l}{5} = 1-m \\ \frac{2l}{5} = \frac{2m}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{1}{2} \\ l = \frac{5}{6} \end{cases}$$

となる。 $l = \frac{5}{6}$ から $OR:RP = 5:1$ となる。

$$(\text{答}) \quad OR:RP = 5:1$$