

1

(1)

共有点の x 座標は $f(x) = g(x)$ を満たすから、

$$2x^2 - 4|x| + a = |x| - a$$

$$\Leftrightarrow 2|x|^2 - 5|x| + 2a = 0$$

$$\Leftrightarrow |x| = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16a}}{4} \quad \dots \textcircled{1}$$

となる。以下 a の値によって場合分けを行う。

[1] $a > \frac{25}{16}$ のとき

$\frac{5 \pm \sqrt{25 - 16a}}{4}$ は実数とならないため、 $\textcircled{1}$ の実数解は存在しない。

[2] $a = \frac{25}{16}$ のとき

$\textcircled{1}$ は、

$$|x| = \frac{5}{4} \Leftrightarrow x = \pm \frac{5}{4}$$

となる。よって、 $\textcircled{1}$ の実数解は 2 個である。

[3] $0 < a < \frac{25}{16}$ のとき

$0 < \sqrt{25 - 16a} < 5$ より、 $\frac{5 \pm \sqrt{25 - 16a}}{4}$ はともに正である。よって $\textcircled{1}$ の実数解は

$$x = \pm \frac{5 - \sqrt{25 - 16a}}{4}, \pm \frac{5 + \sqrt{25 - 16a}}{4}$$

の 4 個である。

[4] $a = 0$ のとき

$\textcircled{1}$ は、

$$|x| = 0, \frac{5}{2} \Leftrightarrow x = 0, \pm \frac{5}{2}$$

となる。よって、 $\textcircled{1}$ の実数解は 3 個である。

[5] $a < 0$ のとき

$5 < \sqrt{25 - 16a}$ より、 $\frac{5 - \sqrt{25 - 16a}}{4} < 0 < \frac{5 + \sqrt{25 - 16a}}{4}$ である。よって $\textcircled{1}$ の実数解は

$$x = \pm \frac{5 + \sqrt{25 - 16a}}{4}$$

の 2 個である。

以上 [1], [2], [3], [4], [5] より、 $\textcircled{1}$ の実数解の個数は以下になる。

$$\left\{ \begin{array}{ll} 0 \text{ 個} & \left(a > \frac{25}{16} \right) \\ 2 \text{ 個} & \left(a = \frac{25}{16}, a < 0 \right) \\ 3 \text{ 個} & (a = 0) \\ 4 \text{ 個} & \left(0 < a < \frac{25}{16} \right) \end{array} \right.$$

この実数解の個数と共有点の個数は一致する。

$$(\text{答}) \left\{ \begin{array}{ll} 0 \text{ 個} & \left(a > \frac{25}{16} \right) \\ 2 \text{ 個} & \left(a = \frac{25}{16}, a < 0 \right) \\ 3 \text{ 個} & (a = 0) \\ 4 \text{ 個} & \left(0 < a < \frac{25}{16} \right) \end{array} \right.$$

(2)

共有点を持つので、 $a \leq \frac{25}{16}$ である。 a の値によって場合分けする。

[1] $0 \leq a \leq \frac{25}{16}$ のとき

$\frac{5 \pm \sqrt{25 - 16a}}{4}$ は非負であり、これが $1 \leq |x| \leq 3$ を満たせばよい。

$$\frac{5 - \sqrt{25 - 16a}}{4} \geq 1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{25 - 16a} \leq 1$$

$$\Leftrightarrow 16a \geq 24$$

$$\Leftrightarrow a \geq \frac{3}{2}$$

となる。このとき、 $\frac{5 + \sqrt{25 - 16a}}{4} \leq \frac{5 + 1}{4} = \frac{3}{2} < 3$ を満たす。以上から、 $\frac{3}{2} \leq a \leq \frac{25}{16}$ であ

ればよい。

[2] $a < 0$ のとき

$\textcircled{1}$ の実数解は、

$$x = \pm \frac{5 + \sqrt{25 - 16a}}{4}$$

であるから、 $1 \leq \frac{5 + \sqrt{25 - 16a}}{4} \leq 3$ となればよい。

$$1 \leq \frac{5 + \sqrt{25 - 16a}}{4} \leq 3$$

$$\Leftrightarrow -1 \leq \sqrt{25 - 16a} \leq 7$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq 25 - 16a \leq 49$$

$$\Leftrightarrow -\frac{3}{2} \leq a \leq \frac{25}{16}$$

したがって、 $-\frac{3}{2} \leq a < 0$ を得る。

以上 [1], [2] より、求める範囲は

$$-\frac{3}{2} \leq a < 0, \frac{3}{2} \leq a \leq \frac{25}{16}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad -\frac{3}{2} \leq a < 0, \frac{3}{2} \leq a \leq \frac{25}{16}$$

(1)

$\sqrt{10} > \sqrt{3}$ であるから, $(\sqrt{10} - \sqrt{3})^{\frac{1}{3}} > 0$ である。

$\sqrt{3} > 1, \frac{7}{4} > 1$ であるから, $\log_{\sqrt{3}} \frac{7}{4} > 0$ である。

$7 > 1, 5 > 1$ であるから, $\log_7 5 > 0$ である。

$6 > 1, 12 > 1$ であるから, $\log_6 12 > 0$ であり, $\frac{1}{\log_6 12} > 0$ である。

$3 < \sqrt{10} < \sqrt{15} < 4$ であるから, $0 < \sqrt{15} - \sqrt{10} < 1$ となり, $12 > 1$ から, $\log_{(\sqrt{15} - \sqrt{10})} 12 < 0$ となる。

以上から, 負の数は $\log_{(\sqrt{15} - \sqrt{10})} 12$ のみである。

(答) $\log_{(\sqrt{15} - \sqrt{10})} 12$

(2)

$\sqrt{3} < 2 < 3 < \sqrt{10}$ であるから, $\sqrt{10} - \sqrt{3} > 1$ となり, $(\sqrt{10} - \sqrt{3})^{\frac{1}{3}} > 1$ である。

$\left(\frac{7}{4}\right)^2 = \frac{49}{16} > 3$ であるから, $\frac{7}{4} > \sqrt{3}$ となり, $\log_{\sqrt{3}} \frac{7}{4} > 1$ である。

$1 < 5 < 7$ であるから, $\log_7 5 < 1$ である。

$1 < 6 < 12$ であるから, $\log_6 12 > 1$ であり, $\frac{1}{\log_6 12} < 1$ である。

以上から 1 以上の数は $(\sqrt{10} - \sqrt{3})^{\frac{1}{3}}, \log_{\sqrt{3}} \frac{7}{4}$ である。

(答) $(\sqrt{10} - \sqrt{3})^{\frac{1}{3}}, \log_{\sqrt{3}} \frac{7}{4}$

(3)

$\frac{7}{9}, \log_7 5, \frac{1}{\log_6 12}$ について考えればよい。ここで,

$$7^7 = 823543 < 1953125 = 5^9$$

$$\Leftrightarrow 7^{\frac{7}{9}} < 5$$

$$\therefore \frac{7}{9} < \log_7 5 \quad (\because 7 > 1)$$

となる。また,

$$\frac{12^7}{6^9} = \frac{2^7}{6^2} = \frac{32}{9} > 1$$

$$\Leftrightarrow 12^7 > 6^9$$

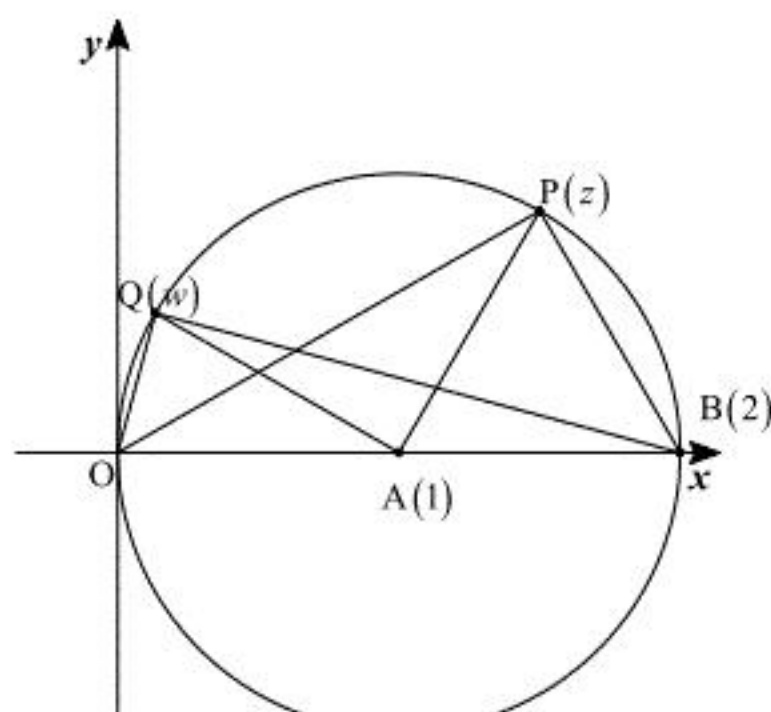
$$\Leftrightarrow 7 \log_6 12 > 9 \quad (\because 6 > 1)$$

$$\therefore \frac{1}{\log_6 12} < \frac{7}{9}$$

となる。以上から, $\frac{1}{\log_6 12} < \frac{7}{9} < \log_7 5$ となる。

(答) $\frac{1}{\log_6 12} < \frac{7}{9} < \log_7 5$

(1)



$\arg z = \alpha$, $\arg w = \beta$ とおく。OP に A から垂線を下ろしたときの事を考えると、垂線の足を H として、 $OH = OA \cos \alpha = \cos \alpha$ である。よって、 $OP = 2 \cos \alpha$ となる。同様に、 $OQ = 2 \cos \beta$ となる。よって、

$$z = 2 \cos \alpha (\cos \alpha + i \sin \alpha)$$

$$w = 2 \cos \beta (\cos \beta + i \sin \beta)$$

である。これを代入して、

$$\begin{aligned} R &= \frac{2 \cdot 2 \cos \alpha (\cos \alpha + i \sin \alpha) \{ \cos \beta (\cos \beta + i \sin \beta) - 1 \}}{2 \cdot 2 \cos \beta (\cos \beta + i \sin \beta) \{ \cos \alpha (\cos \alpha + i \sin \alpha) - 1 \}} \\ &= \frac{\cos \alpha (\cos \alpha + i \sin \alpha) (\cos^2 \beta + i \sin \beta \cos \beta - 1)}{\cos \beta (\cos \beta + i \sin \beta) (\cos^2 \alpha + i \sin \alpha \cos \alpha - 1)} \\ &= \frac{\cos \alpha (\cos \alpha + i \sin \alpha) (-\sin^2 \beta + i \sin \beta \cos \beta)}{\cos \beta (\cos \beta + i \sin \beta) (-\sin^2 \alpha + i \sin \alpha \cos \alpha)} \\ &= \frac{\cos \alpha (\cos \alpha + i \sin \alpha) \sin \beta (-\sin \beta + i \cos \beta)}{\cos \beta (\cos \beta + i \sin \beta) \sin \alpha (-\sin \alpha + i \cos \alpha)} \\ &= \frac{\cos \alpha \sin \beta}{\cos \beta \sin \alpha} \cdot \frac{-\sin \beta + i \cos \beta}{\cos \beta + i \sin \beta} \cdot \frac{\cos \alpha + i \sin \alpha}{-\sin \alpha + i \cos \alpha} \\ &= \frac{\tan \beta}{\tan \alpha} \cdot i \cdot \frac{1}{i} \\ &= \frac{\tan \beta}{\tan \alpha} \end{aligned}$$

となる。 $0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$ であるから、 $0 < \tan \alpha < \tan \beta$ となる。よって、 $\frac{\tan \beta}{\tan \alpha} > 1$ となり示せた。

(証明終了)

(2)

$\angle POQ$ は弧 PQ の円周角であり、 $\angle PAQ$ は弧 PQ の中心角である。よって、 $\angle POQ$ は $\angle PAQ$ の半分になり、

$$\angle POQ = \frac{1}{2} \cdot \angle PAQ = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$$

である。よって $\beta = \alpha + \frac{\pi}{6}$ であり、 $0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$ より、 $0 < \alpha < \frac{\pi}{3}$ である。このとき、

$$R = \frac{\tan\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right)}{\tan \alpha} = \frac{\frac{\tan \alpha + \tan \frac{\pi}{6}}{1 - \tan \alpha \tan \frac{\pi}{6}}}{\tan \alpha} = \frac{\tan \alpha + \frac{1}{\sqrt{3}}}{\tan \alpha \left(1 - \frac{\tan \alpha}{\sqrt{3}}\right)} = \frac{\sqrt{3} \tan \alpha + 1}{\tan \alpha (\sqrt{3} - \tan \alpha)}$$

となる。 $t = \tan \alpha$ とすると、 $0 < t < \sqrt{3}$ であり、

$$R = \frac{\sqrt{3}t + 1}{t(\sqrt{3} - t)}$$

$$\begin{aligned} \frac{dR}{dt} &= \frac{\sqrt{3}t(\sqrt{3} - t) - (\sqrt{3}t + 1)(\sqrt{3} - 2t)}{\{t(\sqrt{3} - t)\}^2} \\ &= \frac{\sqrt{3}t(\sqrt{3} - t) - (\sqrt{3}t + 1)(\sqrt{3} - 2t)}{\{t(\sqrt{3} - t)\}^2} \\ &= \frac{\sqrt{3}t^2 + 2t - \sqrt{3}}{\{t(\sqrt{3} - t)\}^2} \\ &= \frac{(\sqrt{3}t - 1)(t + \sqrt{3})}{\{t(\sqrt{3} - t)\}^2} \end{aligned}$$

である。よって、増減表は以下のようになる。

t	0	...	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	...	$\sqrt{3}$
$f'(x)$	$\times$	+	0	-	$\times$
$f(x)$	$\times$	$\searrow$		$\nearrow$	$\times$

増減表より $t = \frac{1}{\sqrt{3}}$ のとき、最小値をとりそのとき

$$R = \frac{\sqrt{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + 1}{\frac{1}{\sqrt{3}} \left(\sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} \right)} = \frac{1 + 1}{\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}}} = 3$$

である。

(1)

$$R_1 = \int_0^a \frac{dx}{(1-x)^2} = \left[\frac{1}{1-x} \right]_0^a = \frac{1}{1-a} - 1 = \frac{a}{1-a}$$

$$\begin{aligned} R_2 &= 2 \int_0^a \frac{a-x}{(1-x)^3} dx \\ &= \int_0^a (a-x) \left\{ \frac{1}{(1-x)^2} \right\}' dx \\ &= \left[\frac{a-x}{(1-x)^2} \right]_0^a + \int_0^a \frac{dx}{(1-x)^2} \\ &= -a + \frac{a}{1-a} \\ &= \frac{a^2}{1-a} \end{aligned}$$

となる。これより $R_n = \frac{a^n}{1-a}$ と予想し、これを数学的帰納法より示す。

[1] $n=1$ のとき

(1)から $R_1 = \frac{a}{1-a}$ となり確かに $R_n = \frac{a^n}{1-a}$ を満たす。

[2] $n=k+1$ のとき

$n=k$ において、 $R_k = \frac{a^k}{1-a}$ が成り立つと仮定する。このとき、

$$\begin{aligned} R_{k+1} &= (k+1) \int_0^a \frac{(a-x)^k}{(1-x)^{k+2}} dx \\ &= \int_0^a (a-x)^k \left\{ \frac{1}{(1-x)^{k+1}} \right\}' dx \\ &= \left[\frac{(a-x)^k}{(1-x)^{k+1}} \right]_0^a + k \int_0^a \frac{(a-x)^{k-1}}{(1-x)^{k+1}} dx \\ &= -a^k + R_k \\ &= -a^k + \frac{a^k}{1-a} \\ &= \frac{a^{k+1}}{1-a} \end{aligned}$$

となり、 $n=k+1$ でも条件を満たす。

以上[1], [2]から数学的帰納法より、 $R_n = \frac{a^n}{1-a}$ が示せた。

$$(\text{答}) \quad R_n = \frac{a^n}{1-a}$$

(2)

(1)より $R_n = \frac{a^n}{1-a}$ であるから、

$$\sum_{n=1}^N R_n = \sum_{n=1}^N \frac{a^n}{1-a} = \frac{a}{1-a} \cdot \frac{1-a^N}{1-a}$$

であり、

$$\sum_{n=1}^{\infty} R_n = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N R_n = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{a}{1-a} \cdot \frac{1-a^N}{1-a} = \frac{a}{(1-a)^2}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{a}{(1-a)^2}$$

(1)

A 君が 3 個の石を取り出すとき、その出し方は

$${}_{12}C_3 = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 220$$

より 220 通りあり、これらは同様に確からしい。このうち、1 個の白の石と 2 個の黒の石を取り出す場合の数は

$${}_6C_1 \cdot {}_6C_2 = 6 \cdot 15 = 90$$

となり、90 通りである。よって、求める確率は $\frac{90}{220} = \frac{9}{22}$ となる。

(答) $\frac{9}{22}$

(2)

試行後に白の石と黒の石の個数が同数になるのは、

A 君が 3 個の白の石, B 君が 3 個の黒の石を出す場合

A 君が 2 個の白の石と 1 個の黒の石, B 君が 1 個の白の石と 2 個の黒の石を出す場合

A 君が 1 個の白の石と 2 個の黒の石, B 君が 2 個の白の石と 1 個の黒の石を出す場合

A 君が 3 個の黒の石, B 君が 3 個の白の石を出す場合

のいずれかである。それぞれ場合分けして考える。A 君, B 君ともに、12 個の石の中から 3 個取り出すから、取り出し方の総数はそれぞれ

$${}_{12}C_3 = 220$$

より、220 通りである。

[1] A 君が 3 個の白の石, B 君が 3 個の黒の石を出す場合

A 君が白の石 3 個を取り出す場合の数は

$${}_6C_3 = 20$$

より、20 通りである。その後、B 君が 3 個の黒の石を取り出す場合の数は

$${}_7C_3 = 35$$

となり、35 通りである。よって、この場合の確率は

$$\frac{20}{220} \cdot \frac{35}{220} = \frac{7}{484}$$

である。

[2] A 君が 2 個の白の石と 1 個の黒の石, B 君が 1 個の白の石と 2 個の黒の石を出す場合

A 君が 2 個の白の石と 1 個の黒の石を取り出す場合の数は

$${}_6C_2 \cdot {}_6C_1 = 15 \cdot 6 = 90$$

より、90 通りである。その後、B 君が 1 個の白の石と 2 個の黒の石を取り出す場合の数は

$${}_6C_1 \cdot {}_6C_2 = 6 \cdot 15 = 90$$

となり、90 通りである。よって、この場合の確率は

$$\frac{90}{220} \cdot \frac{90}{220} = \frac{81}{484}$$

である。

[3] A 君が 1 個の白の石と 2 個の黒の石, B 君が 2 個の白の石と 1 個の黒の石を出す場合

A 君が 1 個の白の石と 2 個の黒の石を取り出す場合の数は

$${}_6C_1 \cdot {}_6C_2 = 6 \cdot 15 = 90$$

より、90 通りである。その後、B 君が 2 個の白の石と 1 個の黒の石を取り出す場合の数は

$${}_7C_2 \cdot {}_5C_1 = 21 \cdot 5 = 105$$

となり、105 通りである。よって、この場合の確率は

$$\frac{90}{220} \cdot \frac{105}{220} = \frac{189}{968}$$

である。

[4] A 君が 3 個の黒の石, B 君が 3 個の白の石を出す場合

A 君が黒の石 3 個を取り出す場合の数は

$${}_6C_3 = 20$$

より、20 通りである。その後、B 君が 3 個の白の石を取り出す場合の数は

$${}_8C_3 = 56$$

となり、56 通りである。よって、この場合の確率は

$$\frac{20}{220} \cdot \frac{56}{220} = \frac{14}{605}$$

である。

以上[1], [2], [3], [4]から求める確率は

$$\frac{7}{484} + \frac{81}{484} + \frac{189}{968} + \frac{14}{605} = \frac{1937}{4840}$$

となる。

(答) $\frac{1937}{4840}$

(3)

試行後に白の石の数が黒の石より多くなるのは、

A 君が 2 個の白の石と 1 個の黒の石を出す場合

A 君が 1 個の白の石と 2 個の黒の石を出す場合

A 君が 3 個の黒の石を出す場合

のいずれかである。それぞれ場合分けして考える。

[1] A 君が 2 個の白の石と 1 個の黒の石を出すとき

A 君が 2 個の白の石と 1 個の黒の石を取り出す場合の数は(2)から 90 通りである。その後、B 君は黒の石 3 個を取り出せば題意を満たす。その場合の数は、

$${}_6C_3 = 20$$

となり、20 通りである。よって、この場合の確率は

$$\frac{90}{220} \cdot \frac{20}{220} = \frac{9}{242}$$

である。

[2] A 君が 1 個の白の石と 2 個の黒の石を出す時

A 君が 1 個の白の石と 2 個の黒の石を取り出す場合の数は(2)から 90 通りである。その後、B 君は黒の石 3 個を取り出すか、白の石 1 個と黒の石 2 個を出すか、白の石 2 個と黒の石 1 個を出すか、白の石 3 個を出すかで題意を満たす。その場合の数は、

$${}_5C_3 + {}_7C_1 \cdot {}_5C_2 = 10 + 70 = 80$$

となり、80 通りである。よって、この場合の確率は

$$\frac{90}{220} \cdot \frac{80}{220} = \frac{18}{121}$$

である。

[3] A 君が 3 個の黒の石を出す時

A 君が黒の石 3 個を取り出す組み合わせは、(2)より 20 通りである。その後、B 君は黒の石 3 個を取り出すか、白の石 1 個と黒の石 2 個を出すか、白の石 2 個と黒の石 1 個を出すか、白の石 3 個を出すかで題意を満たす。その場合の数は、

$${}_4C_3 + {}_8C_1 \cdot {}_4C_2 + {}_8C_2 \cdot {}_4C_1 = 4 + 48 + 112 = 164$$

となり、164 通りである。よって、この場合の確率は

$$\frac{20}{220} \cdot \frac{164}{220} = \frac{41}{605}$$

である。

以上[1], [2], [3]から求める確率は

$$\frac{9}{242} + \frac{18}{121} + \frac{41}{605} = \frac{307}{1210}$$

となる。