1

(1)

$t=2^x+2^{-x}$ より,

$$t^3=2^{3x}+3\cdot2^x+3\cdot2^{-x}+2^{-3x}$$
$$\Leftrightarrow t^3-3t=2^{3x}+2^{-3x}$$

であるから,

$$\begin{aligned}f(x)&=2^{3x}+2^{-3x}-3\cdot2^{3+x}-3\cdot2^{3-x}\\&=t^3-3t-3\cdot2^3\cdot t\\&=t^3-27t\end{aligned}$$

となる。

(答) $f(x)=t^3-27t$

(2)

$t=2^x+2^{-x}$ について,相加相乗平均の関係より

$$\begin{aligned}2^x+2^{-x}&\geqq2\sqrt{2^x\cdot2^{-x}}\\&=2\end{aligned}$$

となる。等号が成立するのは,$2^x=2^{-x}$ のとき,つまり $x=0$ のときである。よって,t は $0\leqq x\leqq2$ において $x=0$ のとき最小値 2 をとる。

(答) 2

(3)

$g(t)=t^3-27t$ とおく。

$$\begin{aligned}g'(t)&=3t^2-27\\&=3(t-3)(t+3)\end{aligned}$$

であるから,$2\leqq t$ における $g(t)$ の増減表は次のようになる。

t	2	$\cdots$	3	$\cdots$
$g'(t)$		$-$	0	$+$
$g(t)$		↘	極小	↗

よって,$g(t)\geqq g(3)=-54$ となるから,(1)とあわせて $f(x)\geqq-54$ である。また,

$$t=3$$
$$\Leftrightarrow 2^x+2^{-x}=3$$
$$\Leftrightarrow (2^x)^2-3\cdot2^{-x}+1=0$$
$$\Leftrightarrow 2^x=\frac{3\pm\sqrt5}{2}$$
$$\Leftrightarrow x=\log_2\frac{3\pm\sqrt5}{2}$$

であり,$2^2<5<3^2$ より $2<\sqrt5<3$ であるから,

$$\frac{3-\sqrt5}{2}<1<\frac{3+\sqrt5}{2}<4$$
$$\Leftrightarrow \log_2\frac{3-\sqrt5}{2}<0<\log_2\frac{3+\sqrt5}{2}<2$$

が得られる。よって,$0\leqq x\leqq2$ において $t=2^x+2^{-x}=3$ となるのは $x=\log_2\frac{3+\sqrt5}{2}$ のみである。

以上より,$f\left(\log_2\frac{3+\sqrt5}{2}\right)=-54$ である。$f(x)\geqq-54$ であるから,これは $f(x)$ の最小値である。

(答) 最小値 -54 $\left(x=\log_2\frac{3+\sqrt5}{2}\text{ のとき}\right)$

$\boxed{2}$

(1)

$z=1-2i$ のとき，

$$\begin{aligned} w &= \frac{z-i}{z+i} \\ &= \frac{1-3i}{1-i} \\ &= \frac{1-3i}{1-i}\cdot\frac{1+i}{1+i} \\ &= \frac{(1-3i)(1+i)}{2} \\ &= 2-i \end{aligned}$$

である。よって，$z=1-2i$ のとき w の実部は 2 である。

(答) 2

(2)

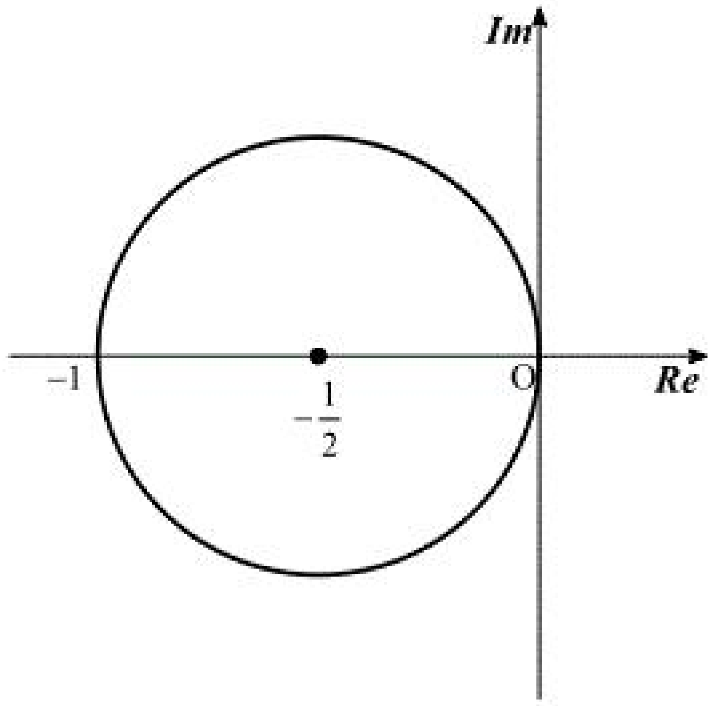
点 w が点 $-1+i$ を中心とする半径1の円周上を動くとき，w は

$$|w-(-1+i)|=1$$

を満たす。これを式変形して，

$$\begin{aligned} &|w+1-i|=1 \\ \Leftrightarrow\ &\left|\frac{z-i}{z+i}+1-i\right|=1 \\ \Leftrightarrow\ &|z-i+(1-i)(z+i)|=|z+i| \\ \Leftrightarrow\ &|(2-i)z+1|=|z+i| \\ \Leftrightarrow\ &\{(2-i)z+1\}\{\overline{(2-i)z+1}\}=(z+i)(\overline{z+i}) \\ \Leftrightarrow\ &\{(2-i)z+1\}\{(2+i)\overline{z}+1\}=(z+i)(\overline{z}-i) \\ \Leftrightarrow\ &5z\overline{z}+(2-i)z+(2+i)\overline{z}+1=z\overline{z}-zi+\overline{z}i+1 \\ \Leftrightarrow\ &4z\overline{z}+2z+2\overline{z}=0 \\ \Leftrightarrow\ &\left(z+\frac{1}{2}\right)\left(\overline{z}+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4} \\ \therefore\ &\left|z-\left(-\frac{1}{2}\right)\right|=\frac{1}{2} \end{aligned}$$

が得られる。よって点 z が描く図形は，複素数平面において中心が点 $-\frac{1}{2}$，半径が $\frac{1}{2}$ の円であり，下図の通りである。



(答) 前図

$\boxed{3}$

(1)

漸化式より，

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1\cos\theta_2 - b_1\sin\theta_2 \\ &= \cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2 \\ &= \cos(\theta_1+\theta_2) \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{4\cdot1\cdot2}+\frac{\pi}{4\cdot2\cdot3}\right) \\ &= \cos\frac{\pi}{6} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

であり，また，

$$\begin{aligned} b_2 &= a_1\sin\theta_2 + b_1\cos\theta_2 \\ &= \cos\theta_1\sin\theta_2 + \sin\theta_1\cos\theta_2 \\ &= \sin(\theta_1+\theta_2) \\ &= \sin\frac{\pi}{6} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

となる。

(答) $a_2=\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ b_2=\dfrac{1}{2}$

(2)

数学的帰納法を利用して，

$$a_n=\cos\left(\sum_{k=1}^{n}\theta_k\right),\ b_n=\sin\left(\sum_{k=1}^{n}\theta_k\right) \qquad \cdot\cdot\cdot(\mathrm{A})$$

であることを示す。

[1] $n=1$ のとき

定義より $a_1=\cos\theta_1,\ b_1=\sin\theta_1$ であるから，$n=1$ のとき(A)は成立する。

[2] $n=m$ (m は自然数)における(A)の成立を仮定したとき

$n=m$ における(A)の成立を仮定したとき，つまり

$$a_m=\cos\left(\sum_{k=1}^{m}\theta_k\right),\ b_m=\sin\left(\sum_{k=1}^{m}\theta_k\right)$$

の成立を仮定したとき，

$$\begin{aligned} a_{m+1} &= a_m\cos\theta_{m+1} - b_m\sin\theta_{m+1} \\ &= \cos\left(\sum_{k=1}^{m}\theta_k\right)\cos\theta_{m+1} - \sin\left(\sum_{k=1}^{m}\theta_k\right)\sin\theta_{m+1} \\ &= \cos\left(\sum_{k=1}^{m}\theta_k+\theta_{m+1}\right) \\ &= \cos\left(\sum_{k=1}^{m+1}\theta_k\right) \end{aligned}$$

であり，同様に

$$\begin{aligned} b_{m+1} &= a_m\sin\theta_{m+1} + b_m\cos\theta_{m+1} \\ &= \cos\left(\sum_{k=1}^{m}\theta_k\right)\sin\theta_{m+1} + \sin\left(\sum_{k=1}^{m}\theta_k\right)\cos\theta_{m+1} \\ &= \sin\left(\sum_{k=1}^{m}\theta_k+\theta_{m+1}\right) \\ &= \sin\left(\sum_{k=1}^{m+1}\theta_k\right) \end{aligned}$$

となり，$n=m+1$ においても(A)は成立する。

以上[1], [2]より，すべての自然数 n において $a_n=\cos\left(\sum_{k=1}^{n}\theta_k\right),\ b_n=\sin\left(\sum_{k=1}^{n}\theta_k\right)$ となる。また，

$\sum_{k=1}^{n}\theta_k$ について

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n}\theta_k &= \sum_{k=1}^{n}\frac{\pi}{4k(k+1)} \\ &= \frac{\pi}{4}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right) \\ &= \frac{\pi}{4}\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right\} \\ &= \frac{\pi}{4}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) \\ &= \frac{\pi}{4}\cdot\frac{n}{n+1} \end{aligned}$$

であるから，数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ の一般項はそれぞれ

$$a_n=\cos\left(\frac{\pi}{4}\cdot\frac{n}{n+1}\right)$$

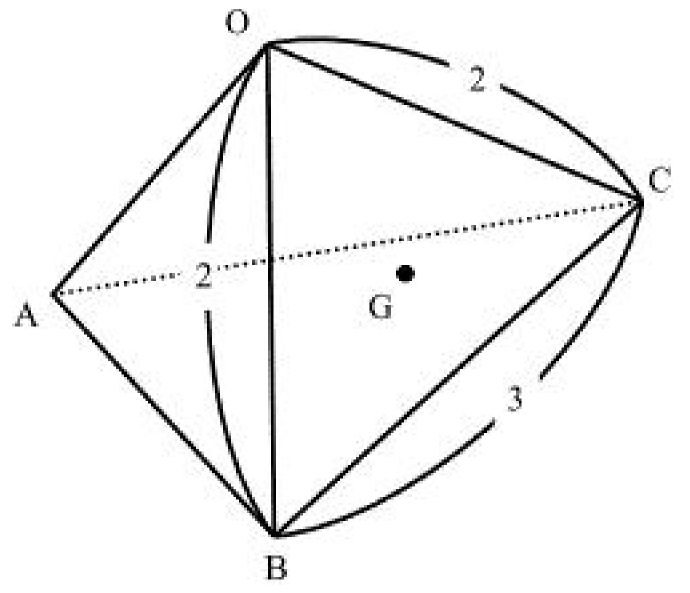
$$b_n=\sin\left(\frac{\pi}{4}\cdot\frac{n}{n+1}\right)$$

となる。

(答) $a_n=\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\cdot\dfrac{n}{n+1}\right),\ b_n=\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\cdot\dfrac{n}{n+1}\right)$

$\boxed{4}$

(1)



$\angle BOC=\theta$ とすると，$\left|\overrightarrow{OB}\right|=2,\ \left|\overrightarrow{OC}\right|=2,\ \left|\overrightarrow{BC}\right|=3$ を用いて，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}&=\left|\overrightarrow{OB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{OC}\right|\cos\theta\\&=\left|\overrightarrow{OB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{OC}\right|\cdot\frac{\left|\overrightarrow{OB}\right|^2+\left|\overrightarrow{OC}\right|^2-\left|\overrightarrow{BC}\right|^2}{2\cdot\left|\overrightarrow{OB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{OC}\right|}\\&=\frac{\left|\overrightarrow{OB}\right|^2+\left|\overrightarrow{OC}\right|^2-\left|\overrightarrow{BC}\right|^2}{2}\\&=-\frac{1}{2}\end{aligned}$$

となる。

(答) $-\frac{1}{2}$

(2)

点Gは△OBCの重心であるから，$\overrightarrow{OG}=\frac{\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{3}$ である。また，直線AGと△OBCを含む平面は垂直に交わることから $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{OC}=0$ である。よって，

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{OC}=0\\&\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{OG}-\overrightarrow{OA}\right)\cdot\overrightarrow{OC}=0\\&\Leftrightarrow\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OG}\cdot\overrightarrow{OC}\\&\Leftrightarrow\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=\frac{\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{3}\cdot\overrightarrow{OC}\\&\Leftrightarrow\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=\frac{\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}}{3}+\frac{\left|\overrightarrow{OC}\right|^2}{3}\\&\Leftrightarrow\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=\frac{-\frac{1}{2}}{3}+\frac{4}{3}\\&\therefore\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=\frac{7}{6}\end{aligned}$$

が得られる。

(答) $\frac{7}{6}$

(3)

背理法を利用して，点Bから△OACを含む平面に下した垂線は，直線AGと交わらないことを示す。すなわち，点Bから△OACを含む平面に下した垂線と直線AGが交点を持つと仮定して矛盾を導く。その交点をMとしたとき，直線BMと△OACを含む平面は垂直に交わることから，$\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{OC}=0$ となる。しかし $\overrightarrow{BM}$ について，実数 t を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BM}&=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AM}\\&=\overrightarrow{BA}+t\overrightarrow{AG}\end{aligned}$$

と表せることから，$\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{OC}=0$ とあわせて，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{OC}&=\left(\overrightarrow{BA}+t\overrightarrow{AG}\right)\cdot\overrightarrow{OC}\\&=\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{OC}+t\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{OC}\\&=\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{OC}\\&=\left(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}\right)\cdot\overrightarrow{OC}\\&=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}\\&=\frac{7}{6}-\left(-\frac{1}{2}\right)\\&=\frac{5}{3}\end{aligned}$$

となる。これは，$\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{OC}=0$ であることと矛盾する。よって，仮定は誤りであり，点Bから△OACを含む平面に下した垂線は直線AGと交わらないことが示された。

(証明終)

5

(1)

$\int_1^e f(x)dx$について，

$$\begin{aligned}
\int_1^e f(x)dx &= \int_1^e\left(\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}\log x\right)dx \\
&= \frac{1}{4}\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^e-\frac{1}{2}\int_1^e \log x dx \\
&= \frac{1}{4}\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^e-\frac{1}{2}\int_1^e (x)' \log x dx \\
&= \frac{1}{12}\left[x^3\right]_1^e-\frac{1}{2}\left\{\left[x\log x\right]_1^e-\int_1^e x(\log x)' dx\right\} \\
&= \frac{1}{12}\left[x^3\right]_1^e-\frac{1}{2}\left\{\left[x\log x\right]_1^e-\int_1^e 1dx\right\} \\
&= \frac{1}{12}\left[x^3\right]_1^e-\frac{1}{2}\left[x\log x-x\right]_1^e \\
&= \frac{1}{12}\left(e^3-1\right)-\frac{1}{2}\left\{(e-e)-(0-1)\right\} \\
&= \frac{e^3-7}{12}
\end{aligned}$$

となる。

(答) $\dfrac{e^3-7}{12}$

(2)

求める長さをlとすると，

$$\begin{aligned}
l &= \int_1^e \sqrt{1+\left\{f'(x)\right\}^2}dx \\
&= \int_1^e \sqrt{1+\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{2x}\right)^2}dx \\
&= \int_1^e \sqrt{1+\left(\frac{x^2}{4}-\frac{1}{2}+\frac{1}{4x^2}\right)}dx \\
&= \int_1^e \sqrt{\frac{x^2}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4x^2}}dx \\
&= \int_1^e \sqrt{\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{2x}\right)^2}dx \\
&= \int_1^e \left(\frac{x}{2}+\frac{1}{2x}\right)dx \quad \left(\because 1 \leqq x \leqq e \text{のとき} \frac{x}{2}+\frac{1}{2x}>0\right) \\
&= \left[\frac{x^2}{4}+\frac{1}{2}\log x\right]_1^e \\
&= \left(\frac{e^2}{4}+\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{4}+0\right) \\
&= \frac{e^2+1}{4}
\end{aligned}$$

となる。

(答) $\dfrac{e^2+1}{4}$

(3)

$\int_{f(1)}^{f(e)} f^{-1}(x)dx$について$f^{-1}(x)=t$とおくと，$x=f(t)$であり，$\dfrac{dx}{dt}=f'(t)$である。また，積分区間は下の表の通りに対応する。

x	$f(1)$	$\to$	$f(e)$
t	1	$\to$	e

よって，

$$\begin{aligned}
\int_{f(1)}^{f(e)} f^{-1}(x)dx &= \int_1^e tf'(t)dt \\
&= \int_1^e t\left(\frac{t}{2}-\frac{1}{2t}\right)dt \\
&= \int_1^e \left(\frac{t^2}{2}-\frac{1}{2}\right)dt \\
&= \left[\frac{t^3}{6}-\frac{t}{2}\right]_1^e \\
&= \left(\frac{e^3}{6}-\frac{e}{2}\right)-\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{e^3-3e+2}{6}
\end{aligned}$$

となる。

(答) $\dfrac{e^3-3e+2}{6}$