1

(1)

$t=2^x+2^{-x}$ より，

$$t^3=2^{3x}+3\cdot 2^x+3\cdot 2^{-x}+2^{-3x}$$
$$\Leftrightarrow t^3-3t=2^{3x}+2^{-3x}$$

であるから，

$$\begin{aligned} f(x)&=2^{3x}+2^{-3x}-3\cdot 2^{3+x}-3\cdot 2^{3-x}\\ &=t^3-3t-3\cdot 2^3\cdot t\\ &=t^3-27t \end{aligned}$$

となる。

(答)　$f(x)=t^3-27t$

(2)

$t=2^x+2^{-x}$ について，相加相乗平均の関係より

$$\begin{aligned} 2^x+2^{-x}&\geqq 2\sqrt{2^x\cdot 2^{-x}}\\ &=2 \end{aligned}$$

となる。等号が成立するのは，$2^x=2^{-x}$ のとき，つまり $x=0$ のときである。よって，t は $0\leqq x\leqq 2$ において $x=0$ のとき最小値 2 をとる。

(答)　2

(3)

$g(t)=t^3-27t$ とおく。

$$\begin{aligned} g'(t)&=3t^2-27\\ &=3(t-3)(t+3) \end{aligned}$$

であるから，$2\leqq t$ における $g(t)$ の増減表は次のようになる。

t	2	$\cdots$	3	$\cdots$
$g'(t)$		$-$	0	$+$
$g(t)$		↘	極小	↗

よって，$g(t)\geqq g(3)=-54$ となるから，(1)とあわせて $f(x)\geqq -54$ である。また，

$$t=3$$
$$\Leftrightarrow 2^x+2^{-x}=3$$
$$\Leftrightarrow \left(2^x\right)^2-3\cdot 2^{-x}+1=0$$
$$\Leftrightarrow 2^x=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$$
$$\Leftrightarrow x=\log_2\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$$

であり，$2^2<5<3^2$ より $2<\sqrt{5}<3$ であるから，

$$\frac{3-\sqrt{5}}{2}<1<\frac{3+\sqrt{5}}{2}<4$$
$$\Leftrightarrow \log_2\frac{3-\sqrt{5}}{2}<0<\log_2\frac{3+\sqrt{5}}{2}<2$$

が得られる。よって，$0\leqq x\leqq 2$ において $t=2^x+2^{-x}=3$ となるのは $x=\log_2\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ のみである。

以上より，$f\left(\log_2\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)=-54$ である。$f(x)\geqq -54$ であるから，これは $f(x)$ の最小値である。

(答)　最小値 -54　（$x=\log_2\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ のとき）

$\boxed{2}$

(1)

円 C について，中心が第1象限にあり，x 軸及び y 軸に接することから中心の座標は正の実数 a を用いて (a, a) とおける。また円 C の半径は a である。直線PQの式は，

$$y=-\frac{4}{3}x+4 \qquad \cdots ①$$

であり，円 C と直線PQが接するとき，点 (a, a) と直線PQの距離が a であるから，

$$a=\frac{\left|\frac{4}{3}\cdot a+a-4\right|}{\sqrt{\left(-\frac{4}{3}\right)^2+1^2}}$$
$$\Leftrightarrow 5a=|7a-12|$$
$$\Leftrightarrow a=1,\ 6$$

となる。以下，円 C と直線PQの接点が確かに線分PQ上に存在することを示す。円 C と直線PQの接点をMとして，①より点Mの座標は実数 α を用いて

$$(3\alpha,\ -4\alpha+4) \qquad \cdots ②$$

と表せる。点Mと点 (a, a) を通る直線を l としたとき，直線 l は直線PQの垂線であるから，その傾きは

$$(-1)\cdot\frac{1}{-\frac{4}{3}}=\frac{3}{4}$$

となる。

[1] $a=1$ のとき

l の傾きは，$\dfrac{(-4\alpha+4)-1}{3\alpha-1}$ であるから，

$$\frac{(-4\alpha+4)-1}{3\alpha-1}=\frac{3}{4}$$
$$\Leftrightarrow \alpha=\frac{3}{5}$$

となる。このとき②より，点Mの座標は $\left(\frac{9}{5}, \frac{8}{5}\right)$ であり，確かに線分PQ上に存在する。

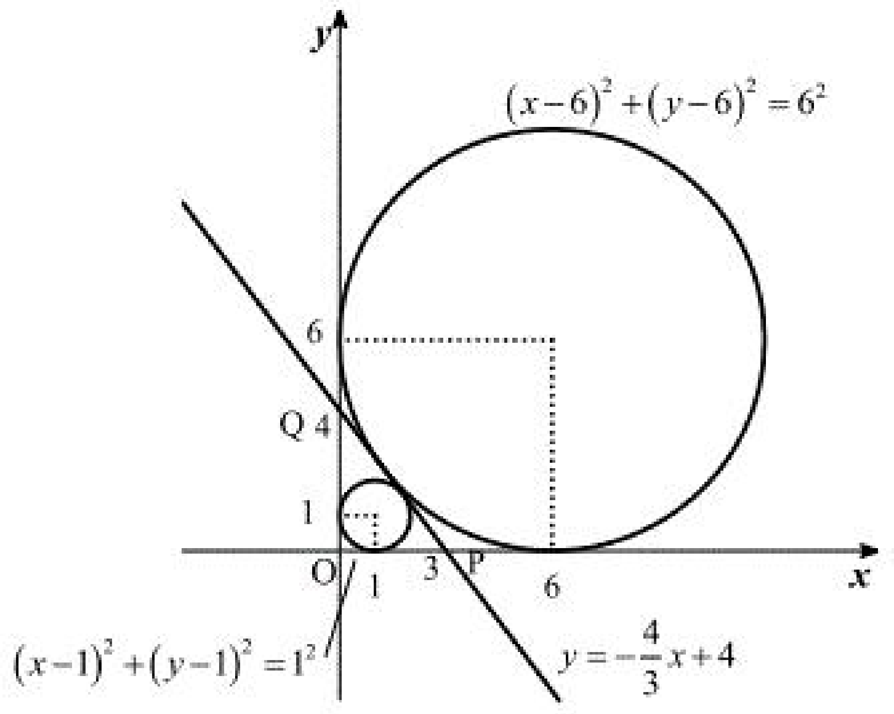
[2] $a=6$ のとき

l の傾きは，$\dfrac{(-4\alpha+4)-6}{3\alpha-6}$ であるから，

$$\frac{(-4\alpha+4)-6}{3\alpha-6}=\frac{3}{4}$$
$$\Leftrightarrow \alpha=\frac{2}{5}$$

となる。このとき②より，点Mの座標は $\left(\frac{6}{5}, \frac{12}{5}\right)$ であり，確かに線分PQ上に存在する。

以上より，円 C の半径は1および6である。また，このとき直線PQと円 C は下図の通りである。



(答) 1，6

(2)

(1)より，円 C と線分PQの接点の座標は $\left(\frac{9}{5}, \frac{8}{5}\right)$ および $\left(\frac{6}{5}, \frac{12}{5}\right)$ である。

(答) 円 C の半径が1のとき $\left(\frac{9}{5}, \frac{8}{5}\right)$，6のとき $\left(\frac{6}{5}, \frac{12}{5}\right)$

3

(1)

漸化式より，

$$\begin{aligned}a_2 &= a_1\cos\theta_2 - b_1\sin\theta_2\\ &= \cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2\\ &= \cos(\theta_1+\theta_2)\\ &= \cos\left(\frac{\pi}{4\cdot1\cdot2}+\frac{\pi}{4\cdot2\cdot3}\right)\\ &= \cos\frac{\pi}{6}\\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

であり，また，

$$\begin{aligned}b_2 &= a_1\sin\theta_2 + b_1\cos\theta_2\\ &= \cos\theta_1\sin\theta_2 + \sin\theta_1\cos\theta_2\\ &= \sin(\theta_1+\theta_2)\\ &= \sin\frac{\pi}{6}\\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

となる。

(答) $a_2 = \frac{\sqrt{3}}{2},\ b_2 = \frac{1}{2}$

(2)

数学的帰納法を利用して，

$$a_n = \cos\left(\sum_{k=1}^{n}\theta_k\right),\ b_n = \sin\left(\sum_{k=1}^{n}\theta_k\right) \qquad \cdot\cdot\cdot(\mathrm{A})$$

であることを示す。

[1] $n=1$ のとき

定義より $a_1=\cos\theta_1,\ b_1=\sin\theta_1$ であるから，$n=1$ のとき(A)は成立する。

[2] $n=m$ (m は自然数)における(A)の成立を仮定したとき

つまり

$$a_m = \cos\left(\sum_{k=1}^{m}\theta_k\right),\ b_m = \sin\left(\sum_{k=1}^{m}\theta_k\right)$$

の成立を仮定したとき，

$$\begin{aligned}a_{m+1} &= a_m\cos\theta_{m+1} - b_m\sin\theta_{m+1}\\ &= \cos\left(\sum_{k=1}^{m}\theta_k\right)\cos\theta_{m+1} - \sin\left(\sum_{k=1}^{m}\theta_k\right)\sin\theta_{m+1}\\ &= \cos\left(\sum_{k=1}^{m}\theta_k+\theta_{m+1}\right)\\ &= \cos\left(\sum_{k=1}^{m+1}\theta_k\right)\end{aligned}$$

であり，同様に

$$\begin{aligned}b_{m+1} &= a_m\sin\theta_{m+1} + b_m\cos\theta_{m+1}\\ &= \cos\left(\sum_{k=1}^{m}\theta_k\right)\sin\theta_{m+1} + \sin\left(\sum_{k=1}^{m}\theta_k\right)\cos\theta_{m+1}\\ &= \sin\left(\sum_{k=1}^{m}\theta_k+\theta_{m+1}\right)\\ &= \sin\left(\sum_{k=1}^{m+1}\theta_k\right)\end{aligned}$$

となり，$n=m+1$ においても(A)は成立する。

以上[1], [2]より，すべての自然数 n において $a_n = \cos\left(\sum_{k=1}^{n}\theta_k\right),\ b_n = \sin\left(\sum_{k=1}^{n}\theta_k\right)$ となる。また，

$\sum_{k=1}^{n}\theta_k$ について

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\theta_k &= \sum_{k=1}^{n}\frac{\pi}{4k(k+1)}\\ &= \frac{\pi}{4}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\\ &= \frac{\pi}{4}\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}\\ &= \frac{\pi}{4}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\\ &= \frac{\pi}{4}\cdot\frac{n}{n+1}\end{aligned}$$

であるから，数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ の一般項はそれぞれ

$$a_n = \cos\left(\frac{\pi}{4}\cdot\frac{n}{n+1}\right)$$

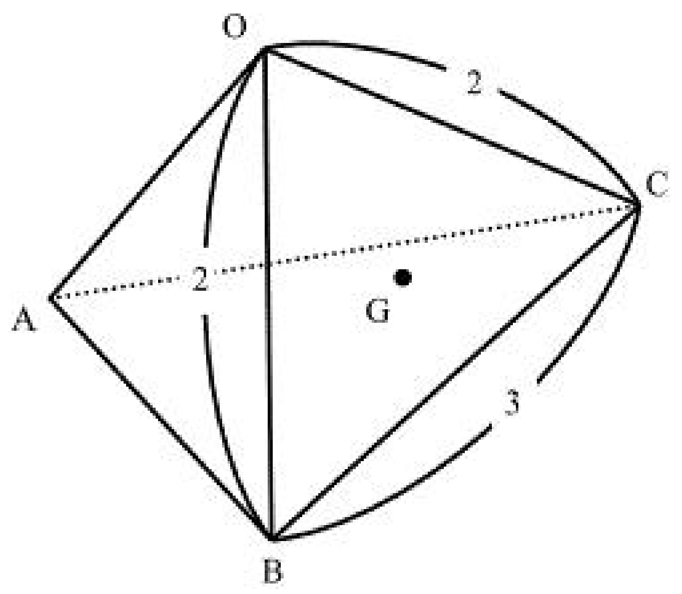
$$b_n = \sin\left(\frac{\pi}{4}\cdot\frac{n}{n+1}\right)$$

となる。

(答) $a_n = \cos\left(\frac{\pi}{4}\cdot\frac{n}{n+1}\right),\ b_n = \sin\left(\frac{\pi}{4}\cdot\frac{n}{n+1}\right)$

4

(1)



$\angle BOC=\theta$ とすると，$|\overrightarrow{OB}|=2, |\overrightarrow{OC}|=2, |\overrightarrow{BC}|=3$ と△OBCについての余弦定理から，

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC} &= |\overrightarrow{OB}|\cdot|\overrightarrow{OC}|\cos\theta \\
&= |\overrightarrow{OB}|\cdot|\overrightarrow{OC}|\cdot\frac{|\overrightarrow{OB}|^2+|\overrightarrow{OC}|^2-|\overrightarrow{BC}|^2}{2\cdot|\overrightarrow{OB}|\cdot|\overrightarrow{OC}|} \\
&= \frac{|\overrightarrow{OB}|^2+|\overrightarrow{OC}|^2-|\overrightarrow{BC}|^2}{2} \\
&= -\frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

となる。

(答) $-\frac{1}{2}$

(2)

点Gは△OBCの重心であるから，$\overrightarrow{OG}=\frac{\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{3}$ である。また，直線AGと△OBCを含む平面は垂直に交わることから $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{OC}=0$ である。よって，

$$
\begin{aligned}
&\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{OC}=0 \\
&\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{OG}-\overrightarrow{OA}\right)\cdot\overrightarrow{OC}=0 \\
&\Leftrightarrow \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OG}\cdot\overrightarrow{OC} \\
&\Leftrightarrow \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=\frac{\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{3}\cdot\overrightarrow{OC} \\
&\Leftrightarrow \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=\frac{\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}}{3}+\frac{|\overrightarrow{OC}|^2}{3} \\
&\Leftrightarrow \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=\frac{-\frac{1}{2}}{3}+\frac{4}{3} \\
&\therefore \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=\frac{7}{6}
\end{aligned}
$$

が得られる。

(答) $\frac{7}{6}$

(3)

背理法を利用して，点Bから△OACを含む平面に下した垂線は，直線AGと交わらないことを示す。すなわち，点Bから△OACを含む平面に下した垂線と直線AGが交点を持つと仮定して矛盾を導く。その交点をMとしたとき，直線BMと△OACを含む平面は垂直に交わることから，$\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{OC}=0$ となる。しかし $\overrightarrow{BM}$ について，実数 t を用いて

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{BM} &= \overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AM} \\
&= \overrightarrow{BA}+t\overrightarrow{AG}
\end{aligned}
$$

と表せることから，$\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{OC}=0$ とあわせて，

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{OC} &= \left(\overrightarrow{BA}+t\overrightarrow{AG}\right)\cdot\overrightarrow{OC} \\
&= \overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{OC}+t\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{OC} \\
&= \overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{OC} \\
&= \left(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}\right)\cdot\overrightarrow{OC} \\
&= \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC} \\
&= \frac{7}{6}-\left(-\frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{5}{3}
\end{aligned}
$$

となる。これは，$\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{OC}=0$ であることと矛盾する。よって，仮定は誤りであり，点Bから△OACを含む平面に下した垂線は直線AGと交わらないことが示された。

(証明終)

5

(1)

$\int_{-1}^{1} f(x)dx = 0$ より，

$$\int_{-1}^{1}(ax^2+bx+c)dx = 0$$
$$\Leftrightarrow \int_{-1}^{1}(ax^2+c)dx + \int_{-1}^{1} bxdx = 0$$
$$\Leftrightarrow 2\int_{0}^{1}(ax^2+c)dx = 0$$
$$\Leftrightarrow \left[\frac{ax^3}{3}+cx\right]_0^1 = 0$$
$$\Leftrightarrow a = -3c \qquad \cdots ①$$

である。同様に $\int_{-1}^{1} xf(x)dx = 0$ より，

$$\int_{-1}^{1} x(ax^2+bx+c)dx = 0$$
$$\Leftrightarrow \int_{-1}^{1}(ax^3+bx^2+cx)dx = 0$$
$$\Leftrightarrow \int_{-1}^{1}(ax^3+cx)dx + \int_{-1}^{1} bx^2dx = 0$$
$$\Leftrightarrow 2\int_{0}^{1} bx^2dx = 0$$
$$\Leftrightarrow \left[\frac{bx^3}{3}\right]_0^1 = 0$$
$$\Leftrightarrow b = 0$$

である。 $b=0$ より以下 $f(x)=ax^2+c$ として， $\int_{-1}^{1} f(x)^2 dx = \frac{2}{5}$ より，

$$\int_{-1}^{1}(ax^2+c)^2 dx = \frac{2}{5}$$
$$\Leftrightarrow \int_{-1}^{1}(a^2x^4+2acx^2+c^2)dx = \frac{2}{5}$$
$$\Leftrightarrow \int_{0}^{1}(a^2x^4+2acx^2+c^2)dx = \frac{1}{5}$$
$$\Leftrightarrow \left[\frac{a^2x^5}{5}+\frac{2acx^3}{3}+c^2x\right]_0^1 = \frac{1}{5}$$
$$\Leftrightarrow \frac{a^2}{5}+\frac{2ac}{3}+c^2 = \frac{1}{5} \qquad \cdots ②$$

となる。①および②より，

$$\frac{a^2}{5}+\frac{2a}{3}\left(-\frac{a}{3}\right)+\left(-\frac{a}{3}\right)^2 = \frac{1}{5}$$
$$\Leftrightarrow a^2 = \frac{9}{4}$$
$$\Leftrightarrow a = \pm\frac{3}{2}$$

となる。 $a>0$ より， $a=\frac{3}{2}$ である。さらに①より， $c=-\frac{1}{2}$ である。

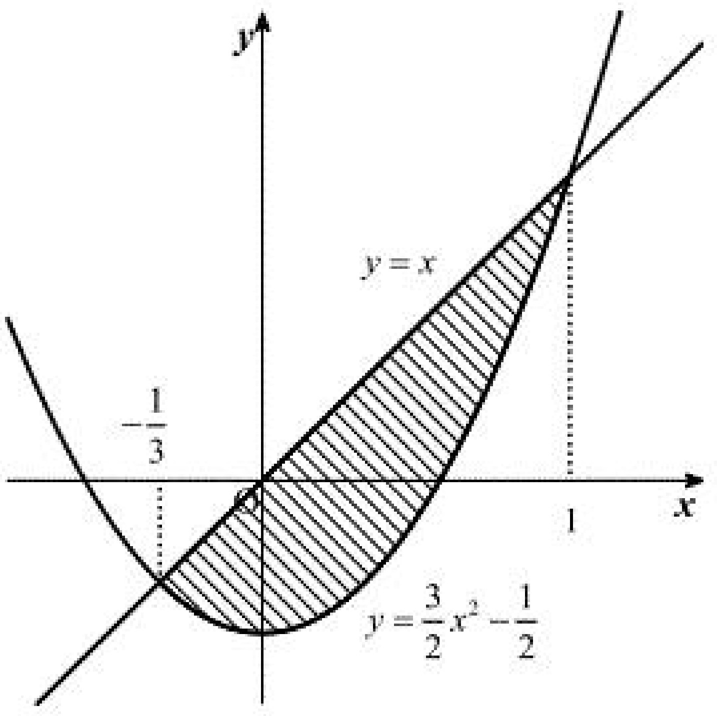
(答) $a=\frac{3}{2}, b=0, c=-\frac{1}{2}$

(2)

(1)より， $f(x)=\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}$ である。曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=x$ の交点の x 座標を考えると，

$$\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2} = x$$
$$\Leftrightarrow 3x^2-2x-1 = 0$$
$$\Leftrightarrow (3x+1)(x-1) = 0$$
$$\therefore x = -\frac{1}{3}, 1$$

である。よって，曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=x$ のグラフは下図の通りである。



曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=x$ で囲まれた部分，つまり斜線部の面積は，

$$\int_{-\frac{1}{3}}^{1}\left\{x-\left(\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}\right)\right\}dx = -\frac{3}{2}\int_{-\frac{1}{3}}^{1}(x-1)\left(x+\frac{1}{3}\right)dx$$
$$= \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{6}\left\{1-\left(-\frac{1}{3}\right)\right\}^3$$
$$= \frac{16}{27}$$

となる。

(答) $\frac{16}{27}$