1

(1)

数学的帰納法を利用して,

$$a_n=\cos\left(\sum_{k=1}^{n}\theta_k\right),\ b_n=\sin\left(\sum_{k=1}^{n}\theta_k\right) \qquad \cdot\cdot\cdot(\mathrm{A})$$

であることを示す。

[1] $n=1$ のとき

定義より $a_1=\cos\theta_1,\ b_1=\sin\theta_1$ であるから, $n=1$ のとき(A)は成立する。

[2] $n=m$ (m は自然数)における(A)の成立を仮定したとき

つまり

$$a_m=\cos\left(\sum_{k=1}^{m}\theta_k\right),\ b_m=\sin\left(\sum_{k=1}^{m}\theta_k\right)$$

の成立を仮定したとき,

$$\begin{aligned}a_{m+1}&=a_m\cos\theta_{m+1}-b_m\sin\theta_{m+1}\\&=\cos\left(\sum_{k=1}^{m}\theta_k\right)\cos\theta_{m+1}-\sin\left(\sum_{k=1}^{m}\theta_k\right)\sin\theta_{m+1}\\&=\cos\left(\sum_{k=1}^{m}\theta_k+\theta_{m+1}\right)\\&=\cos\left(\sum_{k=1}^{m+1}\theta_k\right)\end{aligned}$$

であり, 同様に

$$\begin{aligned}b_{m+1}&=a_m\sin\theta_{m+1}+b_m\cos\theta_{m+1}\\&=\cos\left(\sum_{k=1}^{m}\theta_k\right)\sin\theta_{m+1}+\sin\left(\sum_{k=1}^{m}\theta_k\right)\cos\theta_{m+1}\\&=\sin\left(\sum_{k=1}^{m}\theta_k+\theta_{m+1}\right)\\&=\sin\left(\sum_{k=1}^{m+1}\theta_k\right)\end{aligned}$$

となり, $n=m+1$ においても(A)は成立する。

以上[1], [2]より, すべての自然数 n において $a_n=\cos\left(\sum_{k=1}^{n}\theta_k\right),\ b_n=\sin\left(\sum_{k=1}^{n}\theta_k\right)$ であることを示した。また, $\sum_{k=1}^{n}\theta_k$ について

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\theta_k&=\sum_{k=1}^{n}\frac{5\pi}{6k(k+1)}\\&=\frac{5\pi}{6}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\\&=\frac{5\pi}{6}\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}\\&=\frac{5\pi}{6}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\\&=\frac{5\pi}{6}\cdot\frac{n}{n+1}\end{aligned}$$

であるから, 数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ の一般項はそれぞれ

$$a_n=\cos\left(\frac{5\pi}{6}\cdot\frac{n}{n+1}\right)$$
$$b_n=\sin\left(\frac{5\pi}{6}\cdot\frac{n}{n+1}\right)$$

となる。

(答) $a_n=\cos\left(\frac{5\pi}{6}\cdot\frac{n}{n+1}\right),\ b_n=\sin\left(\frac{5\pi}{6}\cdot\frac{n}{n+1}\right)$

(2)

数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ の極限は, (1)の結果を用いて,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}a_n&=\lim_{n\to\infty}\cos\left(\frac{5\pi}{6}\cdot\frac{n}{n+1}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\cos\left\{\frac{5\pi}{6}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\right\}\\&=\cos\frac{5\pi}{6}\\&=-\frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}b_n&=\lim_{n\to\infty}\sin\left(\frac{5\pi}{6}\cdot\frac{n}{n+1}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\sin\left\{\frac{5\pi}{6}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\right\}\\&=\sin\frac{5\pi}{6}\\&=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

となる。

(答) $\lim_{n\to\infty}a_n=-\frac{\sqrt{3}}{2},\ \lim_{n\to\infty}b_n=\frac{1}{2}$

$\boxed{2}$

(1)

$z=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}i$ のとき，

$$
\begin{aligned}
w&=\frac{\left(1+\sqrt{3}\right)-\left(1+\sqrt{3}\right)i-2i}{\left(1+\sqrt{3}\right)-\left(1+\sqrt{3}\right)i+2i}\\
&=\frac{\left(\sqrt{3}+1\right)-\left(\sqrt{3}+3\right)i}{\left(\sqrt{3}+1\right)-\left(\sqrt{3}-1\right)i}\\
&=\frac{\left(\sqrt{3}+1\right)-\left(\sqrt{3}+3\right)i}{\left(\sqrt{3}+1\right)-\left(\sqrt{3}-1\right)i}\cdot\frac{\left(\sqrt{3}+1\right)+\left(\sqrt{3}-1\right)i}{\left(\sqrt{3}+1\right)+\left(\sqrt{3}-1\right)i}\\
&=\frac{\left(\sqrt{3}+1\right)^2+\left(\sqrt{3}+1\right)\left\{\left(\sqrt{3}-1\right)-\left(\sqrt{3}+3\right)\right\}i-\left(\sqrt{3}+3\right)\left(\sqrt{3}-1\right)i^2}{\left(\sqrt{3}+1\right)^2+\left(\sqrt{3}-1\right)^2}\\
&=\frac{\left\{\left(\sqrt{3}+1\right)^2+\left(\sqrt{3}+3\right)\left(\sqrt{3}-1\right)\right\}-4\left(\sqrt{3}+1\right)i}{8}\\
&=\frac{1+\sqrt{3}}{2}-\frac{1+\sqrt{3}}{2}i
\end{aligned}
$$

が得られる。したがって実部は $\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$ となる。

(答) $\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$

(2)

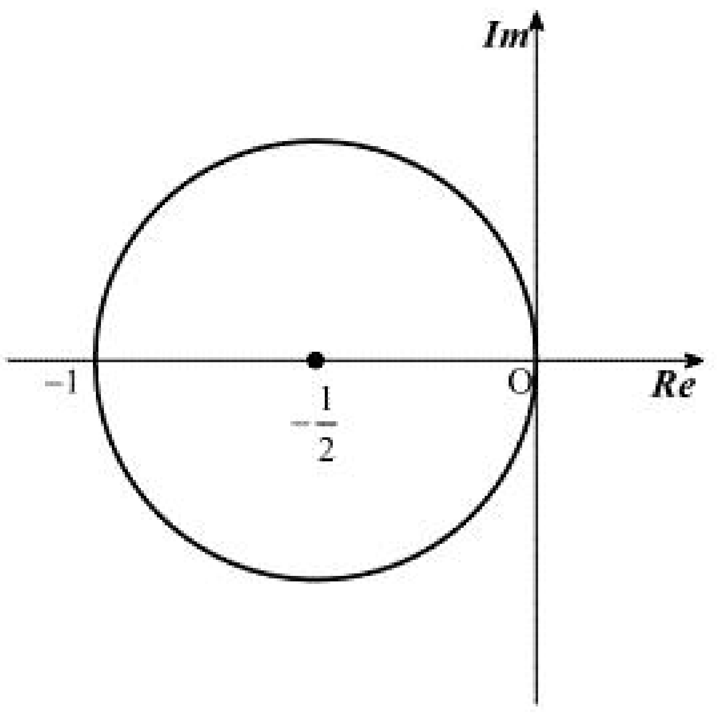
点 w が点 $-1+i$ を中心とする半径1の円周上を動くとき，w は

$$\left|w-(-1+i)\right|=1$$

を満たす。これを式変形して，

$$
\begin{aligned}
&\left|w+1-i\right|=1\\
\Leftrightarrow&\left|\frac{z-i}{z+i}+1-i\right|=1\\
\Leftrightarrow&\left|z-i+(1-i)(z+i)\right|=\left|z+i\right|\\
\Leftrightarrow&\left|(2-i)z+1\right|=\left|z+i\right|\\
\Leftrightarrow&\left\{(2-i)z+1\right\}\left\{\overline{(2-i)z+1}\right\}=(z+i)\left(\overline{z+i}\right)\\
\Leftrightarrow&\left\{(2-i)z+1\right\}\left\{(2+i)\overline{z}+1\right\}=(z+i)\left(\overline{z}-i\right)\\
\Leftrightarrow&5z\overline{z}+(2-i)z+(2+i)\overline{z}+1=z\overline{z}-zi+\overline{z}i+1\\
\Leftrightarrow&4z\overline{z}+2z+2\overline{z}=0\\
\Leftrightarrow&\left(z+\frac{1}{2}\right)\left(\overline{z}+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}\\
\therefore&\left|z-\left(-\frac{1}{2}\right)\right|=\frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

が得られる。よって点 z が描く図形は，複素数平面において中心が点 $-\dfrac{1}{2}$，半径が $\dfrac{1}{2}$ の円であり，下図の通りである。



(答) 前図

3

$$\begin{cases} a+b+\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=10 & \cdots ① \\ a+b+ab+\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}+\dfrac{1}{ab}=34 & \cdots ② \end{cases}$$

について，②－①より，

$$ab+\frac{b}{a}+\frac{a}{b}+\frac{1}{ab}=24$$

$$\Leftrightarrow \left(a+\frac{1}{a}\right)\left(b+\frac{1}{b}\right)=24 \qquad \cdots ③$$

となる。ここで，$a+\dfrac{1}{a}=p,\ b+\dfrac{1}{b}=q$ とおくと，①および③より，$p+q=10,\ pq=24$ が得られ，

解と係数の関係より，p, q は二次方程式 $t^2-10t+24=0$ の解となる。ここで，

$$t^2-10t+24=0$$
$$\Leftrightarrow (t-4)(t-6)=0$$
$$\Leftrightarrow t=4,\ 6$$

であるから，$(p, q)=(4, 6), (6, 4)$ が得られる。

[1] $(p, q)=(4, 6)$ のとき

$$a+\frac{1}{a}=4$$
$$\Leftrightarrow a^2-4a+1=0\ (\because a\neq 0)$$
$$\therefore a=2\pm\sqrt{3}$$

であり，

$$b+\frac{1}{b}=6$$
$$\Leftrightarrow b^2-6b+1=0\ (\because b\neq 0)$$
$$\therefore b=3\pm 2\sqrt{2}$$

となる。$a, b<1$ より，$a=2-\sqrt{3},\ b=3-2\sqrt{2}$ となる。しかし，

$1.73<\sqrt{3}<1.74$ より $0.26<2-\sqrt{3}<0.27$

$1.41<\sqrt{2}<1.42$ より $0.16<3-2\sqrt{2}<0.18$

であるから $a>b$ となり，解として不適である。

[2] $(p, q)=(6, 4)$ のとき

$$a+\frac{1}{a}=6,\ b+\frac{1}{b}=4$$
$$\Leftrightarrow a^2-6a+1=0,\ b^2+4b+1=0\ (\because a, b\neq 0)$$
$$\therefore a=3\pm 2\sqrt{2},\ b=2\pm\sqrt{3}$$

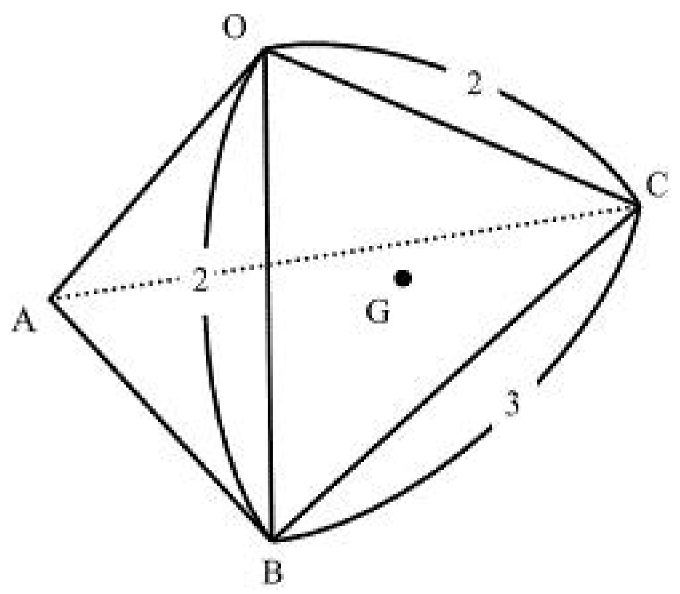
となり，$a<b<1$ と合わせて，$(a, b)=\left(3-2\sqrt{2},\ 2-\sqrt{3}\right)$ が得られる。

以上[1], [2]より，$(a, b)=\left(3-2\sqrt{2},\ 2-\sqrt{3}\right)$ である。

（答）$(a, b)=\left(3-2\sqrt{2},\ 2-\sqrt{3}\right)$

4

(1)



$\angle BOC=\theta$ とすると, $\left|\overrightarrow{OB}\right|=2, \left|\overrightarrow{OC}\right|=2, \left|\overrightarrow{BC}\right|=3$ と△OBC についての余弦定理から,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}&=\left|\overrightarrow{OB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{OC}\right|\cos\theta\\&=\left|\overrightarrow{OB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{OC}\right|\cdot\frac{\left|\overrightarrow{OB}\right|^2+\left|\overrightarrow{OC}\right|^2-\left|\overrightarrow{BC}\right|^2}{2\cdot\left|\overrightarrow{OB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{OC}\right|}\\&=\frac{\left|\overrightarrow{OB}\right|^2+\left|\overrightarrow{OC}\right|^2-\left|\overrightarrow{BC}\right|^2}{2}\\&=-\frac{1}{2}\end{aligned}$$

となる。

(答) $-\frac{1}{2}$

(2)

まず, 直線 AG と△OBC を含む平面は垂直に交わることから,

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{OC}=0\\&\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{OG}-\overrightarrow{OA}\right)\cdot\overrightarrow{OC}=0\\&\Leftrightarrow\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OG}\cdot\overrightarrow{OC}\\&\Leftrightarrow\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=\frac{\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{3}\cdot\overrightarrow{OC}\\&\Leftrightarrow\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=\frac{\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}}{3}+\frac{\left|\overrightarrow{OC}\right|^2}{3}\\&\Leftrightarrow\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=\frac{-\frac{1}{2}}{3}+\frac{4}{3}\\&\therefore\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=\frac{7}{6}\end{aligned}$$

である。背理法を利用して, 点 B から△OAC を含む平面に下した垂線は, 直線 AG と交わらないことを示す。すなわち, 点 B から△OAC を含む平面に下した垂線と直線 AG が交点を持つと仮定して矛盾を導く。その交点を M としたとき, 直線 BM と△OAC を含む平面は垂直に交わることから, $\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{OC}=0$ となる。$\overrightarrow{BM}$ について, 実数 t を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BM}&=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AM}\\&=\overrightarrow{BA}+t\overrightarrow{AG}\end{aligned}$$

と表せるから,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{OC}&=\left(\overrightarrow{BA}+t\overrightarrow{AG}\right)\cdot\overrightarrow{OC}\\&=\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{OC}+t\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{OC}\\&=\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{OC}\left(\because\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{OC}=0\right)\\&=\left(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}\right)\cdot\overrightarrow{OC}\\&=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}\\&=\frac{7}{6}-\left(-\frac{1}{2}\right)\\&=\frac{5}{3}\end{aligned}$$

となる。これは, $\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{OC}=0$ であることと矛盾する。よって, 仮定は誤りであり, 点 B から△OAC を含む平面に下した垂線は直線 AG と交わらないことが示された。

(証明終)

5

(1)

$f(x)=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}\log x$ について $f'(x)=\frac{x}{2}-\frac{1}{2x}$ であるから，C の長さは，

$$\begin{aligned}\int_1^e\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx&=\int_1^e\sqrt{1+\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{2x}\right)^2}\,dx\\&=\int_1^e\sqrt{1+\left(\frac{x^2}{4}-\frac{1}{2}+\frac{1}{4x^2}\right)}\,dx\\&=\int_1^e\sqrt{\frac{x^2}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4x^2}}\,dx\\&=\int_1^e\sqrt{\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{2x}\right)^2}\,dx\\&=\int_1^e\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{2x}\right)dx\quad\left(\because 1\leqq x\leqq e\text{ のとき }\frac{x}{2}+\frac{1}{2x}>0\right)\\&=\left[\frac{x^2}{4}+\frac{1}{2}\log x\right]_1^e\\&=\left(\frac{e^2}{4}+\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{4}+0\right)\\&=\frac{e^2+1}{4}\end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{e^2+1}{4}$

(2)

点M，点Qはそれぞれ直線 $y=x$ 上の点であるから，実数 p,q を用いて，それぞれ座標を (p,p)，(q,q) とおける。直線AMは直線 $y=x$ の垂線であるからその傾きは -1 である。よって，

$$\begin{aligned}&\frac{f(1)-p}{1-p}=-1\\\Leftrightarrow\ &\frac{\frac{1}{4}-p}{1-p}=-1\\\therefore\ &p=\frac{5}{8}\end{aligned}$$

となり，点Mの座標は $\left(\frac{5}{8},\frac{5}{8}\right)$ となる。同様に，直線PQの傾きも -1 であるから，

$$\begin{aligned}&\frac{f(x)-q}{x-q}=-1\\\therefore\ &q=\frac{f(x)+x}{2}\end{aligned}$$

となり，点Qの座標は $\left(\frac{f(x)+x}{2},\frac{f(x)+x}{2}\right)$ となる。よって，線分MQの長さ $g(x)$ は，

$$\begin{aligned}g(x)&=\sqrt{\left(\frac{f(x)+x}{2}-\frac{5}{8}\right)^2+\left(\frac{f(x)+x}{2}-\frac{5}{8}\right)^2}\\&=\sqrt{2}\left|\frac{f(x)+x}{2}-\frac{5}{8}\right|\\&=\sqrt{2}\left|\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{4}\log x+\frac{x}{2}-\frac{5}{8}\right|\end{aligned}$$

となる。$h(x)=\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{4}\log x+\frac{x}{2}-\frac{5}{4}$ とおくと，$h'(x)=\frac{x}{4}-\frac{1}{4x}+\frac{1}{2}$ となる。$1\leqq x\leqq e$ において，

$$\begin{aligned}\frac{x}{4}-\frac{1}{4x}+\frac{1}{2}&=\frac{1}{4x}(x^2-1)+\frac{1}{2}\\&\geqq\frac{1}{2}\end{aligned}$$

より $h'(x)>0$ であるから $h(x)$ は単調増加をする。$h(1)=0$ であるから，以上より $1\leqq x\leqq e$ において $h(x)\geqq 0$ であり，

$$g(x)=\sqrt{2}\left(\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{4}\log x+\frac{x}{2}-\frac{5}{8}\right)$$

となる。次に，$\sqrt{2}\int_0^{g(e)}\log g^{-1}(t)\,dt$ について $g^{-1}(t)=s$ とおくと，$t=g(s)$ であり，$\frac{dt}{ds}=g'(s)$ である。また，$g(1)=0$ より積分区間は下の表の通りに対応する。

t	0	$\to$	$g(e)$
s	1	$\to$	e

以上より，途中部分積分を用いて，

$$\begin{aligned}\sqrt{2}\int_0^{g(e)}\log g^{-1}(t)\,dt&=\sqrt{2}\int_1^e(\log s)g'(s)\,ds\\&=\sqrt{2}\left[g(s)\log s\right]_1^e-\sqrt{2}\int_1^e\frac{g(s)}{s}\,ds\\&=\sqrt{2}g(e)-2\int_1^e\left(\frac{s}{8}-\frac{\log s}{4s}-\frac{5}{8s}+\frac{1}{2}\right)ds\\&=\sqrt{2}g(e)-2\int_1^e\left(\frac{s}{8}-\frac{\log s(\log s)'}{4}-\frac{5}{8s}+\frac{1}{2}\right)ds\\&=\sqrt{2}g(e)-2\left[\frac{s^2}{16}-\frac{(\log s)^2}{8}-\frac{5\log s}{8}+\frac{s}{2}\right]_1^e\\&=2\left(\frac{e^2}{8}-\frac{1}{4}+\frac{e}{2}-\frac{5}{8}\right)-2\left\{\left(\frac{e^2}{16}-\frac{1}{8}-\frac{5}{8}+\frac{e}{2}\right)-\left(\frac{1}{16}-0-0+\frac{1}{2}\right)\right\}\\&=\frac{e^2+7}{8}\end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{e^2+7}{8}$