

(1)

 $t = 2^x + 2^{-x}$ より,

$$t^3 = 2^{3x} + 3 \cdot 2^x + 3 \cdot 2^{-x} + 2^{-3x}$$

$$\Leftrightarrow t^3 - 3t = 2^{3x} + 2^{-3x}$$

であるから,

$$f(x) = 2^{3x} + 2^{-3x} - 3 \cdot 2^{3x} - 3 \cdot 2^{3-x}$$

$$= t^3 - 3t - 3 \cdot 2^3 \cdot t$$

$$= t^3 - 27t$$

となる。

$$(答) f(x) = t^3 - 27t$$

(2)

 $t = 2^x + 2^{-x}$ について、相加相乗平均の関係より

$$2^x + 2^{-x} \geq 2\sqrt{2^x \cdot 2^{-x}}$$

$$= 2$$

となる。等号が成立するのは、 $2^x = 2^{-x}$ のとき、つまり $x = 0$ のときである。よって、 t は $0 \leq x \leq 2$ において $x = 0$ のとき最小値 2 をとる。

(答) 2

(3)

 $g(t) = t^3 - 27t$ とおく。

$$g'(t) = 3t^2 - 27$$

$$= 3(t-3)(t+3)$$

であるから、 $2 \leq t$ における $g(t)$ の増減表は次のようになる。

t	2	...	3	...
$g'(t)$		-	0	+
$g(t)$		↘	極小	↗

よって、 $g(t) \geq g(3) = -54$ となるから、(1)とあわせて $f(x) \geq -54$ である。また、

$$t = 3$$

$$\Leftrightarrow 2^x + 2^{-x} = 3$$

$$\Leftrightarrow (2^x)^2 - 3 \cdot 2^x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2^x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \log_2 \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

であり、 $2^2 < 5 < 3^2$ より $2 < \sqrt{5} < 3$ であるから、

$$\frac{3 - \sqrt{5}}{2} < 1 < \frac{3 + \sqrt{5}}{2} < 4$$

$$\Leftrightarrow \log_2 \frac{3 - \sqrt{5}}{2} < 0 < \log_2 \frac{3 + \sqrt{5}}{2} < 2$$

が得られる。よって、 $0 \leq x \leq 2$ において $t = 2^x + 2^{-x} = 3$ となるのは $x = \log_2 \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$ のみである。

以上より、 $f\left(\log_2 \frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right) = -54$ である。 $f(x) \geq -54$ であるから、これは $f(x)$ の最小値である。

(答) 最小値 -54 ($x = \log_2 \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$ のとき)

(1)

 $z=1-2i$ のとき、

$$\begin{aligned}
 w &= \frac{z-i}{z+i} \\
 &= \frac{1-3i}{1-i} \\
 &= \frac{1-3i}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i} \\
 &= \frac{(1-3i)(1+i)}{2} \\
 &= 2-i
 \end{aligned}$$

である。よって、 $z=1-2i$ のとき w の実部は 2 である。

(答) 2

(2)

点 w が点 $-1+i$ を中心とする半径 1 の円周上を動くとき、 w は

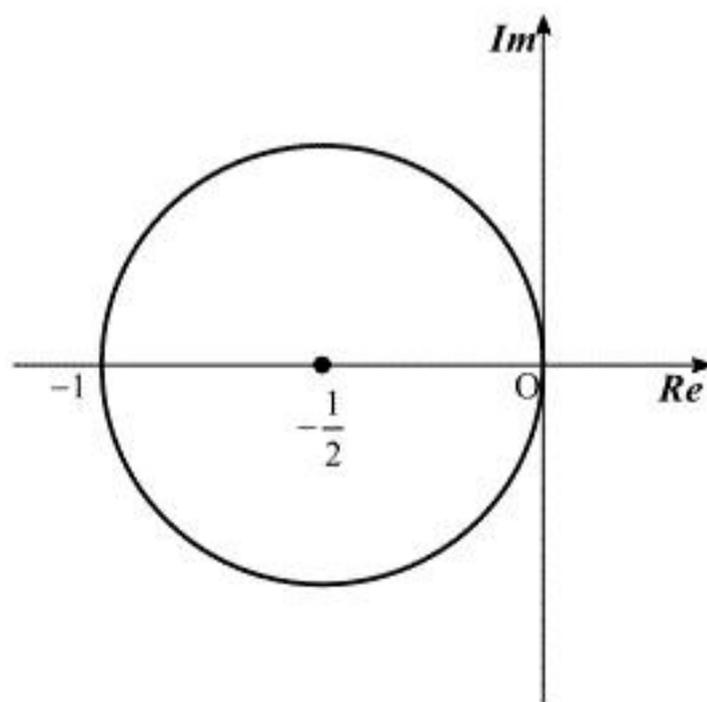
$$|w - (-1+i)| = 1$$

を満たす。これを式変形して、

$$\begin{aligned}
 |w+1-i| &= 1 \\
 \Leftrightarrow \left| \frac{z-i}{z+i} + 1 - i \right| &= 1 \\
 \Leftrightarrow |z-i + (1-i)(z+i)| &= |z+i| \\
 \Leftrightarrow |(2-i)z+1| &= |z+i| \\
 \Leftrightarrow \{(2-i)z+1\} \overline{\{(2-i)z+1\}} &= (z+i) \overline{(z+i)} \\
 \Leftrightarrow \{(2-i)z+1\} \{(2+i)\bar{z}+1\} &= (z+i)(\bar{z}-i) \\
 \Leftrightarrow 5z\bar{z} + (2-i)z + (2+i)\bar{z} + 1 &= z\bar{z} - zi + \bar{z}i + 1 \\
 \Leftrightarrow 4z\bar{z} + 2z + 2\bar{z} &= 0 \\
 \Leftrightarrow \left(z + \frac{1}{2}\right) \left(\bar{z} + \frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{4} \\
 \therefore \left| z - \left(-\frac{1}{2}\right) \right| &= \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

が得られる。よって点 z が描く図形は、複素数平面において中心が点 $-\frac{1}{2}$ 、半径が $\frac{1}{2}$ の円であり、

下図の通りである。



(答) 前図

(1)

漸化式より,

$$\begin{aligned}
 a_2 &= a_1 \cos \theta_2 - b_1 \sin \theta_2 \\
 &= \cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2 \\
 &= \cos(\theta_1 + \theta_2) \\
 &= \cos\left(\frac{\pi}{4 \cdot 1 \cdot 2} + \frac{\pi}{4 \cdot 2 \cdot 3}\right) \\
 &= \cos \frac{\pi}{6} \\
 &= \frac{\sqrt{3}}{2}
 \end{aligned}$$

であり, また,

$$\begin{aligned}
 b_2 &= a_1 \sin \theta_2 + b_1 \cos \theta_2 \\
 &= \cos \theta_1 \sin \theta_2 + \sin \theta_1 \cos \theta_2 \\
 &= \sin(\theta_1 + \theta_2) \\
 &= \sin \frac{\pi}{6} \\
 &= \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad a_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}, b_2 = \frac{1}{2}$$

(2)

数学的帰納法を利用して,

$$a_n = \cos\left(\sum_{k=1}^n \theta_k\right), b_n = \sin\left(\sum_{k=1}^n \theta_k\right) \quad \cdots (A)$$

であることを示す。

[1] $n=1$ のとき定義より $a_1 = \cos \theta_1, b_1 = \sin \theta_1$ であるから, $n=1$ のとき (A) は成立する。[2] $n=m$ (m は自然数) における (A) の成立を仮定したとき

つまり

$$a_m = \cos\left(\sum_{k=1}^m \theta_k\right), b_m = \sin\left(\sum_{k=1}^m \theta_k\right)$$

の成立を仮定したとき,

$$\begin{aligned}
 a_{m+1} &= a_m \cos \theta_{m+1} - b_m \sin \theta_{m+1} \\
 &= \cos\left(\sum_{k=1}^m \theta_k\right) \cos \theta_{m+1} - \sin\left(\sum_{k=1}^m \theta_k\right) \sin \theta_{m+1} \\
 &= \cos\left(\sum_{k=1}^m \theta_k + \theta_{m+1}\right) \\
 &= \cos\left(\sum_{k=1}^{m+1} \theta_k\right)
 \end{aligned}$$

であり, 同様に

$$\begin{aligned}
 b_{m+1} &= a_m \sin \theta_{m+1} + b_m \cos \theta_{m+1} \\
 &= \cos\left(\sum_{k=1}^m \theta_k\right) \sin \theta_{m+1} + \sin\left(\sum_{k=1}^m \theta_k\right) \cos \theta_{m+1} \\
 &= \sin\left(\sum_{k=1}^m \theta_k + \theta_{m+1}\right) \\
 &= \sin\left(\sum_{k=1}^{m+1} \theta_k\right)
 \end{aligned}$$

となり, $n=m+1$ においても (A) は成立する。以上 [1], [2] より, すべての自然数 n において $a_n = \cos\left(\sum_{k=1}^n \theta_k\right), b_n = \sin\left(\sum_{k=1}^n \theta_k\right)$ となる。また, $\sum_{k=1}^n \theta_k$ について

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^n \theta_k &= \sum_{k=1}^n \frac{\pi}{4k(k+1)} \\
 &= \frac{\pi}{4} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \\
 &= \frac{\pi}{4} \left\{ \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \right\} \\
 &= \frac{\pi}{4} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \\
 &= \frac{\pi}{4} \cdot \frac{n}{n+1}
 \end{aligned}$$

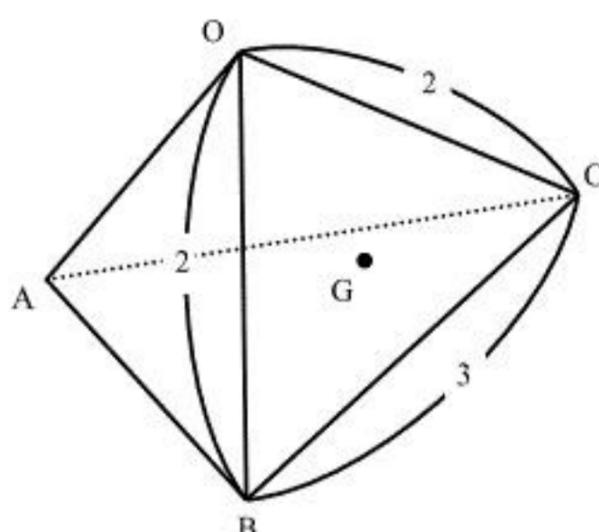
であるから, 数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ の一般項はそれぞれ

$$\begin{aligned}
 a_n &= \cos\left(\frac{\pi}{4} \cdot \frac{n}{n+1}\right) \\
 b_n &= \sin\left(\frac{\pi}{4} \cdot \frac{n}{n+1}\right)
 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad a_n = \cos\left(\frac{\pi}{4} \cdot \frac{n}{n+1}\right), b_n = \sin\left(\frac{\pi}{4} \cdot \frac{n}{n+1}\right)$$

(1)



$\angle BOC = \theta$ とすると、 $|\overline{OB}| = 2$, $|\overline{OC}| = 2$, $|\overline{BC}| = 3$ と $\triangle OBC$ についての余弦定理から、

$$\begin{aligned} \overline{OB} \cdot \overline{OC} &= |\overline{OB}| \cdot |\overline{OC}| \cos \theta \\ &= |\overline{OB}| \cdot |\overline{OC}| \cdot \frac{|\overline{OB}|^2 + |\overline{OC}|^2 - |\overline{BC}|^2}{2 \cdot |\overline{OB}| \cdot |\overline{OC}|} \\ &= \frac{|\overline{OB}|^2 + |\overline{OC}|^2 - |\overline{BC}|^2}{2} \\ &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

となる。

(答) $-\frac{1}{2}$

(2)

点 G は $\triangle OBC$ の重心であるから、 $\overline{OG} = \frac{\overline{OB} + \overline{OC}}{3}$ である。また、直線 AG と $\triangle OBC$ を含む平面は垂直に交わることから $\overline{AG} \cdot \overline{OC} = 0$ である。よって、

$$\begin{aligned} \overline{AG} \cdot \overline{OC} &= 0 \\ \Leftrightarrow (\overline{OG} - \overline{OA}) \cdot \overline{OC} &= 0 \\ \Leftrightarrow \overline{OA} \cdot \overline{OC} &= \overline{OG} \cdot \overline{OC} \\ \Leftrightarrow \overline{OA} \cdot \overline{OC} &= \frac{\overline{OB} + \overline{OC}}{3} \cdot \overline{OC} \\ \Leftrightarrow \overline{OA} \cdot \overline{OC} &= \frac{\overline{OB} \cdot \overline{OC}}{3} + \frac{|\overline{OC}|^2}{3} \\ \Leftrightarrow \overline{OA} \cdot \overline{OC} &= \frac{-\frac{1}{2}}{3} + \frac{4}{3} \\ \therefore \overline{OA} \cdot \overline{OC} &= \frac{7}{6} \end{aligned}$$

が得られる。

(答) $\frac{7}{6}$

(3)

背理法を利用して、点 B から $\triangle OAC$ を含む平面に下した垂線は、直線 AG と交わらないことを示す。すなわち、点 B から $\triangle OAC$ を含む平面に下した垂線と直線 AG が交点を持つと仮定して矛盾を導く。その交点を M としたとき、直線 BM と $\triangle OAC$ を含む平面は垂直に交わることから、 $\overline{BM} \cdot \overline{OC} = 0$ となる。しかし \overline{BM} について、実数 t を用いて

$$\begin{aligned} \overline{BM} &= \overline{BA} + \overline{AM} \\ &= \overline{BA} + t\overline{AG} \end{aligned}$$

と表せることから、 $\overline{AG} \cdot \overline{OC} = 0$ とあわせて、

$$\begin{aligned} \overline{BM} \cdot \overline{OC} &= (\overline{BA} + t\overline{AG}) \cdot \overline{OC} \\ &= \overline{BA} \cdot \overline{OC} + t\overline{AG} \cdot \overline{OC} \\ &= \overline{BA} \cdot \overline{OC} \\ &= (\overline{OA} - \overline{OB}) \cdot \overline{OC} \\ &= \overline{OA} \cdot \overline{OC} - \overline{OB} \cdot \overline{OC} \\ &= \frac{7}{6} - \left(-\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{5}{3} \end{aligned}$$

となる。これは、 $\overline{BM} \cdot \overline{OC} = 0$ であることと矛盾する。よって、仮定は誤りであり、点 B から $\triangle OAC$ を含む平面に下した垂線は直線 AG と交わらないことが示された。

(証明終)

(1)

$\int_1^e f(x) dx$ について,

$$\begin{aligned}
 \int_1^e f(x) dx &= \int_1^e \left(\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2} \log x \right) dx \\
 &= \frac{1}{4} \left[\frac{x^3}{3} \right]_1^e - \frac{1}{2} \int_1^e \log x dx \\
 &= \frac{1}{4} \left[\frac{x^3}{3} \right]_1^e - \frac{1}{2} \int_1^e (x)' \log x dx \\
 &= \frac{1}{12} [x^3]_1^e - \frac{1}{2} \left\{ [x \log x]_1^e - \int_1^e x (\log x)' dx \right\} \\
 &= \frac{1}{12} [x^3]_1^e - \frac{1}{2} \left\{ [x \log x]_1^e - \int_1^e 1 dx \right\} \\
 &= \frac{1}{12} [x^3]_1^e - \frac{1}{2} [x \log x - x]_1^e \\
 &= \frac{1}{12} (e^3 - 1) - \frac{1}{2} \{ (e - e) - (0 - 1) \} \\
 &= \frac{e^3 - 7}{12}
 \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{e^3 - 7}{12}$

(2)

求める長さを l とすると,

$$\begin{aligned}
 l &= \int_1^e \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2} dx \\
 &= \int_1^e \sqrt{1 + \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{2x} \right)^2} dx \\
 &= \int_1^e \sqrt{1 + \left(\frac{x^2}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4x^2} \right)} dx \\
 &= \int_1^e \sqrt{\frac{x^2}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4x^2}} dx \\
 &= \int_1^e \sqrt{\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2x} \right)^2} dx \\
 &= \int_1^e \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2x} \right) dx \quad (\because 1 \leq x \leq e \text{ のとき } \frac{x}{2} + \frac{1}{2x} > 0) \\
 &= \left[\frac{x^2}{4} + \frac{1}{2} \log x \right]_1^e \\
 &= \left(\frac{e^2}{4} + \frac{1}{2} \right) - \left(\frac{1}{4} + 0 \right) \\
 &= \frac{e^2 + 1}{4}
 \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{e^2 + 1}{4}$

(3)

$\int_{f(0)}^{f(e)} f^{-1}(x) dx$ について $f^{-1}(x) = t$ とおくと, $x = f(t)$ であり, $\frac{dx}{dt} = f'(t)$ である。また, 積分区

間は下の表の通りに対応する。

x	$f(1)$	\rightarrow	$f(e)$
t	1	\rightarrow	e

よって,

$$\begin{aligned}
 \int_{f(0)}^{f(e)} f^{-1}(x) dx &= \int_1^e t f'(t) dt \\
 &= \int_1^e t \left(\frac{t}{2} - \frac{1}{2t} \right) dt \\
 &= \int_1^e \left(\frac{t^2}{2} - \frac{1}{2} \right) dt \\
 &= \left[\frac{t^3}{6} - \frac{t}{2} \right]_1^e \\
 &= \left(\frac{e^3}{6} - \frac{e}{2} \right) - \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{2} \right) \\
 &= \frac{e^3 - 3e + 2}{6}
 \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{e^3 - 3e + 2}{6}$