

(1)

直線 L_1 と放物線 C の式から y を消去すると、 $a \neq 0$ であるから 2 次方程式

$$\begin{aligned} ax^2 - 2ax + a + \frac{1}{a} &= x \\ \Leftrightarrow ax^2 - (2a+1)x + \left(a + \frac{1}{a}\right) &= 0 \quad \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

が得られる。方程式①の判別式を D_1 とすると、

$$D_1 = (2a+1)^2 - 4a\left(a + \frac{1}{a}\right) = 4a - 3$$

であり、放物線 C と直線 L_1 が異なる 2 点で交わる時、式①は異なる 2 つの解を持つから、求める a の値の範囲は

$$D_1 > 0 \Leftrightarrow a > \frac{3}{4}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad a > \frac{3}{4}$$

(2)

方程式①において、2 つの解を α, β ($\alpha < \beta$) とおくと、解と係数の関係より、

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 2 + \frac{1}{a} & \cdots \textcircled{2} \\ \alpha\beta = 1 + \frac{1}{a^2} & \cdots \textcircled{3} \end{cases}$$

が成り立つ。2 つの交点の座標は $(\alpha, \alpha), (\beta, \beta)$ と書くことができるから、

$$\ell = \sqrt{(\beta - \alpha)^2 + (\beta - \alpha)^2} = \sqrt{2}(\beta - \alpha) \quad (\because \beta > \alpha)$$

であり、②、③より、

$$\begin{aligned} (\beta - \alpha)^2 &= (\beta + \alpha)^2 - 4\alpha\beta \\ &= \frac{4a - 3}{a^2} \end{aligned}$$

である。よって、(1)より $4a - 3 > 0$ であり、 ℓ は正であるから、

$$\begin{aligned} \sqrt{2} &\leq \ell \leq \sqrt{\frac{5}{2}} \\ \Leftrightarrow 2 &\leq \ell^2 \leq \frac{5}{2} \\ \Leftrightarrow a^2 &\leq 4a - 3 \leq \frac{5}{4}a^2 \\ \Leftrightarrow \text{「} a^2 - 4a + 3 &\leq 0 \text{」かつ「} 5a^2 - 16a + 12 \geq 0 \text{」} \\ \Leftrightarrow \text{「}(a-3)(a-1) &\leq 0 \text{」かつ「}(5a-6)(a-2) \geq 0 \text{」} \end{aligned}$$

となり、この条件と $a > \frac{3}{4}$ を同時に満たす a の値の範囲は、

$$1 \leq a \leq \frac{6}{5}, 2 \leq a \leq 3$$

である。

$$(\text{答}) \quad 1 \leq a \leq \frac{6}{5}, 2 \leq a \leq 3$$

(3)

直線 L_2 の方程式は $y = m(x-1)$ と表すことができ、この式と放物線 C の式から y を消去すると、 $a \neq 0$ であるから 2 次方程式

$$ax^2 - (2a+m)x + \left(m+a + \frac{1}{a}\right) = 0 \quad \cdots \textcircled{4}$$

が得られる。この方程式の判別式を D_2 とすると、放物線 C と直線 L_1 が接するとき、式④は重解を持つから、

$$\begin{aligned} D_2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (2a+m)^2 - 4a\left(m+a + \frac{1}{a}\right) &= 0 \\ \Leftrightarrow m^2 - 4 &= 0 \\ \therefore m &= \pm 2 \end{aligned}$$

となる。これより、 m は a に無関係な値となる。

(証明終)

以下、 m の値で場合分けを行う。

[1] $m = 2$ のとき

方程式④より、接点の x 座標は

$$x = \frac{2a+2}{2a} = 1 + \frac{1}{a}$$

であり、 $y = 2(x-1)$ より $y = \frac{2}{a}$ である。よって、このときの接点の座標は $\left(1 + \frac{1}{a}, \frac{2}{a}\right)$ である。

[2] $m = -2$ のとき

方程式④より、接点の x 座標は

$$x = \frac{2a-2}{2a} = 1 - \frac{1}{a}$$

であり、 $y = -2(x-1)$ より $y = \frac{2}{a}$ である。よって、このときの接点の座標は $\left(1 - \frac{1}{a}, \frac{2}{a}\right)$ である。

以上[1],[2]より、求める接点の座標は $\left(1 - \frac{1}{a}, \frac{2}{a}\right), \left(1 + \frac{1}{a}, \frac{2}{a}\right)$ である。

$$(\text{答}) \quad \left(1 - \frac{1}{a}, \frac{2}{a}\right), \left(1 + \frac{1}{a}, \frac{2}{a}\right)$$

(1)

$\triangle ABC$ において正弦定理より、

$$\frac{y}{\sin 2\theta} = \frac{x}{\sin \theta}$$

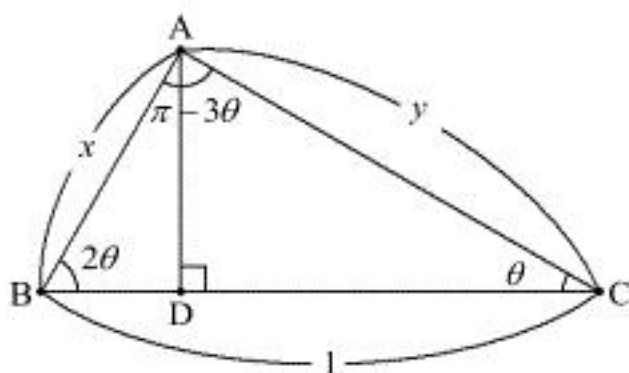
$$\Leftrightarrow \frac{y}{x} = 2 \cos \theta$$

である。

(答) $\frac{y}{x} = 2 \cos \theta$

(2)

点Aから線分BCにおろした垂線の足を点Dとし、以下に $\triangle ABC$ および点Dを図示する。



上図より、

$$BD + DC = x \cos 2\theta + y \cos \theta = 1$$

が成り立つ。よって、 $x \cos 2\theta + y \cos \theta$ は θ に無関係な値となる。

(証明終)

(3)

$\triangle ABC$ において正弦定理より、 $\sin(\pi - 3\theta) = \sin 3\theta$ であることに注意すると、

$$\frac{y}{\sin 2\theta} = \frac{x}{\sin \theta} = \frac{1}{\sin 3\theta}$$

が成り立つ。よって、

$$x = \frac{\sin \theta}{\sin 3\theta}, y = \frac{\sin 2\theta}{\sin 3\theta}$$

と表される。

(答) $x = \frac{\sin \theta}{\sin 3\theta}, y = \frac{\sin 2\theta}{\sin 3\theta}$

(3)

(3)より、

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{\cos \theta \sin 3\theta - 3 \sin \theta \cos 3\theta}{\sin^2 3\theta}$$

$$\frac{dy}{d\theta} = \frac{2 \cos 2\theta \sin 3\theta - 3 \sin 2\theta \cos 3\theta}{\sin^2 3\theta}$$

となるから、

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{2 \cos 2\theta \sin 3\theta - 3 \sin 2\theta \cos 3\theta}{\cos \theta \sin 3\theta - 3 \sin \theta \cos 3\theta}$$

である。これより、 $\theta = \frac{\pi}{6}$ における曲線 $x = f(\theta)$ 、 $y = g(\theta)$ の傾きは、

$$\frac{2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1}{\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 1} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

である。さらに、(3)より、

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}, g\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

であるから、求める接線の方程式は、

$$y - g\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}} \left\{ x - f\left(\frac{\pi}{6}\right) \right\}$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{2\sqrt{3}}{3}x + \frac{\sqrt{3}}{6}$$

である。

(答) $y = \frac{2\sqrt{3}}{3}x + \frac{\sqrt{3}}{6}$

3

(1)

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 \cdot e^{-x} + x(-e^{-x}) \\ &= (1-x)e^{-x} \end{aligned}$$

であるから、 $f(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f(x)$	+	0	-
$f'(x)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$

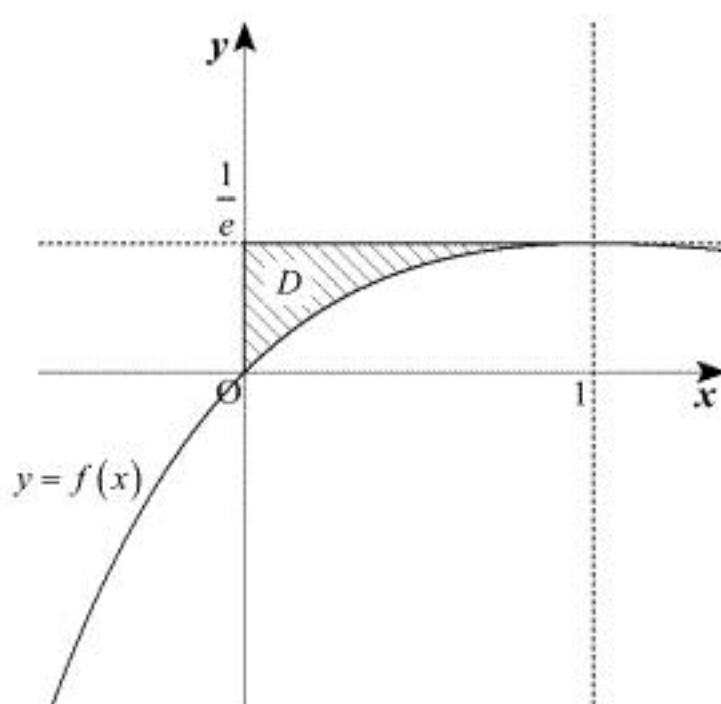
上表より、 $f(x)$ は $x=1$ で最大値 $f(1)=\frac{1}{e}$ をとる。よって、すべての実数 x について、不等式

$$f(x) \leq \frac{1}{e} \text{ が成り立つ。}$$

(証明終)

(2)

以下に領域 D を斜線部で示す。



よって、求める面積を S とすると、

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 \left(\frac{1}{e} - xe^{-x} \right) dx \\ &= \left[\frac{x}{e} \right]_0^1 + \left[xe^{-x} \right]_0^1 - \int_0^1 e^{-x} dx \\ &= \frac{1}{e} + \frac{1}{e} + \left[e^{-x} \right]_0^1 = \frac{3}{e} - 1 \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{3}{e} - 1$

(3)

求める体積を V とすると、(2)の図より

$$V = \int_0^{\frac{1}{e}} \pi x^2 dy$$

となる。ここで、 $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ であり、 x と y の対応は以下のようになる。

y	0	$\rightarrow$	$\frac{1}{e}$
x	0	$\rightarrow$	1

以上より、

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^1 x^2 f'(x) dx \\ &= \pi \left(\left[x^2 f(x) \right]_0^1 - \int_0^1 2xf(x) dx \right) \\ &= \pi \left\{ \frac{1}{e} - 2 \left(\left[-x^2 e^{-x} \right]_0^1 - \int_0^1 -2xe^{-x} dx \right) \right\} \\ &= \pi \left\{ \frac{1}{e} - 2 \left(-\frac{1}{e} + 2 \left[-xe^{-x} \right]_0^1 - 2 \int_0^1 -e^{-x} dx \right) \right\} \\ &= \pi \left\{ \frac{1}{e} - 2 \left(-\frac{1}{e} - \frac{2}{e} - 2 \left[e^{-x} \right]_0^1 \right) \right\} \\ &= \pi \left\{ \frac{1}{e} - 2 \left(-\frac{1}{e} - \frac{2}{e} - \frac{2}{e} + 2 \right) \right\} = \pi \left(\frac{11}{e} - 4 \right) \end{aligned}$$

となる。

(答) $\pi \left(\frac{11}{e} - 4 \right)$

(1)

P_1 はステップ1で箱 A から赤球を取り、ステップ2で箱 B から白球を取る場合を考えればよいから、その確率は

$$P_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$$

である。 P_2 はステップ1からステップ3まで毎回赤球を取り、ステップ4で箱 B から白球を取る場合を考えればよいから、その確率は

$$P_2 = \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{81}$$

である。 P_n はステップ1からステップ $2n-1$ まで毎回赤球を取り、ステップ $2n$ で箱 B から白球を取る場合を考えればよいから、その確率は

$$P_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{2n-1} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9^n}$$

である。

$$(\text{答}) \quad P_1 = \frac{2}{9}, P_2 = \frac{2}{81}, P_n = \frac{2}{9^n}$$

(2)

(1)より、

$$\begin{aligned} P_1 + P_2 + P_3 + \cdots + P_n &= \sum_{k=1}^n 2 \left(\frac{1}{9}\right)^k \\ &= 2 \cdot \frac{\frac{1}{9} \left(1 - \frac{1}{9^n}\right)}{1 - \frac{1}{9}} \\ &= \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{9^n}\right) \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{9^n}\right)$$

(3)

いま、

$$S_n = P_1 + 2P_2 + 3P_3 + \cdots + nP_n \quad \cdots \textcircled{1}$$

とおくと、 $P_n = \frac{2}{9^n}$ であるから、

$$\frac{1}{9} S_n = P_2 + 2P_3 + \cdots + (n-1)P_n + nP_{n+1} \quad \cdots \textcircled{2}$$

となる。①-②より、

$$\begin{aligned} \frac{8}{9} S_n &= (P_1 + P_2 + P_3 + \cdots + P_n) - nP_{n+1} \\ \Leftrightarrow S_n &= \frac{9}{8} \left\{ \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{9^n}\right) - \frac{2n}{9^{n+1}} \right\} \\ \Leftrightarrow S_n &= \frac{9^{n+1} - 8n - 9}{32 \cdot 9^n} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{9^{n+1} - 8n - 9}{32 \cdot 9^n}$$

(1)

点 G は $\triangle ABC$ の重心であるから、

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3}$$

である。したがって、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PX} &= \overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OP} \\ &= \frac{s}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) - c\vec{t} \\ &= \frac{s}{3}(\vec{a} + \vec{b}) + \left(\frac{s}{3} - t\right)\vec{c}\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{PX} = \frac{s}{3}(\vec{a} + \vec{b}) + \left(\frac{s}{3} - t\right)\vec{c}$$

(2)

点 M は直線 PX 上にあるから、 x を実数として

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM} &= \overrightarrow{OP} + x\overrightarrow{PX} \\ &= \frac{sx}{3}(\vec{a} + \vec{b}) + \left\{\left(\frac{s}{3} - t\right)x + t\right\}\vec{c}\end{aligned}$$

と表される。また、点 M は線分 AB 上にあるから、実数 y ($0 < y < 1$) を用いて

$$\overrightarrow{OM} = y\vec{a} + (1-y)\vec{b}$$

と表すことができる。 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ は同一平面上にないから、各係数を比較すると

$$\begin{cases} \frac{sx}{3} = y & \dots\dots ① \\ \frac{sx}{3} = 1 - y & \dots\dots ② \\ \left(\frac{s}{3} - t\right)x + t = 0 & \dots\dots ③ \end{cases}$$

が成り立つ。①と②より、 $y = \frac{1}{2}$ となるから、

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$$

となり、点 M は線分 AB の中点であることが示された。

(証明終)

(3)

$s = \frac{6}{7}$ のとき①より、

$$\frac{6}{7} \cdot \frac{x}{3} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{7}{4}$$

である。さらに、③より、

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{3} \cdot \frac{6}{7} - t\right) \cdot \frac{7}{4} + t &= 0 \\ \Leftrightarrow -\frac{3}{4}t &= -\frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow t &= \frac{2}{3}\end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad t = \frac{2}{3}$$