

(1)

放物線 C と直線 L_1 が異なる 2 点で交わる時、2 次方程式

$$a(x-1)^2 + \frac{1}{a} = x \Leftrightarrow ax^2 - (2a+1)x + a + \frac{1}{a} = 0$$

が異なる 2 つの実数解を持つ。 $a \neq 0$ であるから、この判別式を D とおくと求めるべき a の値の範囲は、

$$D > 0$$

$$\Leftrightarrow (2a+1)^2 - 4a\left(a + \frac{1}{a}\right) > 0$$

$$\Leftrightarrow 4a - 3 > 0$$

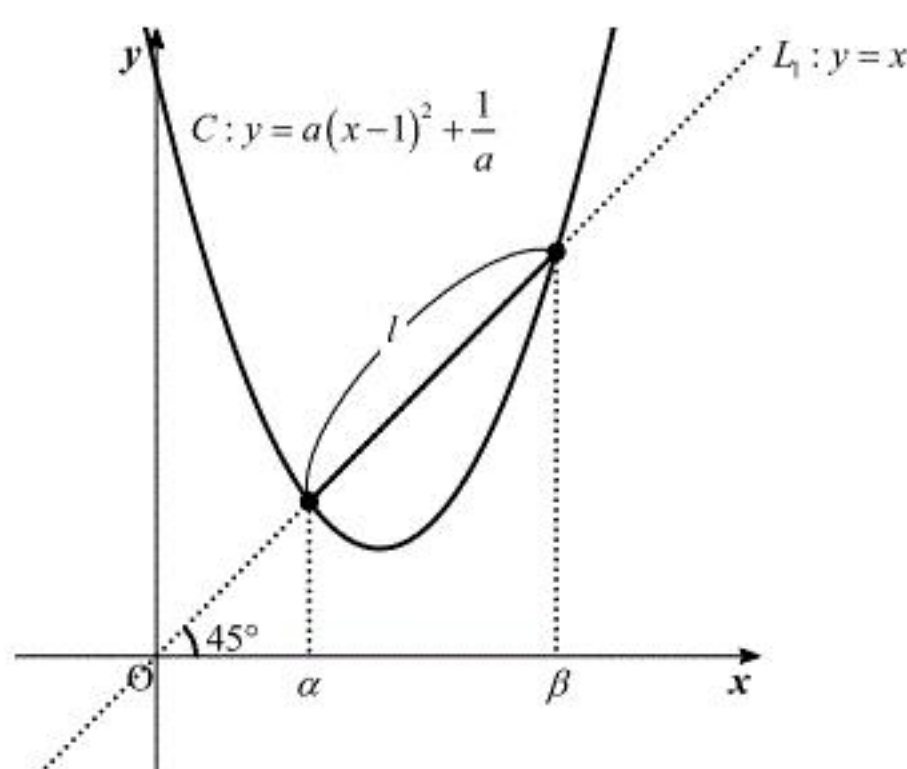
$$\Leftrightarrow a > \frac{3}{4}$$

となる。

$$(\text{答}) \ a > \frac{3}{4}$$

(2)

放物線 C と直線 L_1 の 2 つの交点の x 座標を α, β ($\alpha < \beta$) とおく。放物線 C と直線 L_1 を図示すると以下の通りになる。



直線 L_1 の傾きは 1 であるから、直線 L_1 と x 軸のなす角は 45° であり $l = \sqrt{2}(\beta - \alpha)$ と書ける。よって、 $\sqrt{2} \leq l \leq \sqrt{\frac{5}{2}} \Leftrightarrow 1 \leq \beta - \alpha \leq \frac{\sqrt{5}}{2}$ を満たす a の値の範囲を求めればよい。いま、 α, β は

2 次方程式 $ax^2 - (2a+1)x + a + \frac{1}{a} = 0$ の解であるから、解と係数の関係より、

$$\alpha + \beta = \frac{2a+1}{a}$$

$$\alpha\beta = 1 + \frac{1}{a^2}$$

が成り立つ。これより、

$$\begin{aligned} (\beta - \alpha)^2 &= (\beta + \alpha)^2 - 4\alpha\beta \\ &= \left(\frac{2a+1}{a}\right)^2 - 4\left(1 + \frac{1}{a^2}\right) \\ &= \frac{4}{a} - \frac{3}{a^2} \end{aligned}$$

が得られる。 $\alpha < \beta$ より、 $\beta - \alpha > 0$ であるから各辺を 2 乗すると、

$$\begin{aligned} 1 &\leq \beta - \alpha \leq \frac{\sqrt{5}}{2} \\ \Leftrightarrow 1 &\leq (\beta - \alpha)^2 \leq \frac{5}{4} \\ \Leftrightarrow 1 &\leq \frac{4}{a} - \frac{3}{a^2} \leq \frac{5}{4} \\ \Leftrightarrow a^2 &\leq 4a - 3 \leq \frac{5}{4}a^2 \end{aligned}$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned} a^2 &\leq 4a - 3 \\ \Leftrightarrow a^2 - 4a + 3 &\leq 0 \\ \Leftrightarrow (a-3)(a-1) &\leq 0 \\ \Leftrightarrow 1 &\leq a \leq 3 \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

であり、

$$\begin{aligned} 4a - 3 &\leq \frac{5}{4}a^2 \\ \Leftrightarrow 5a^2 - 16a + 12 &\geq 0 \\ \Leftrightarrow (5a-6)(a-2) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow a &\leq \frac{6}{5}, a \geq 2 \quad \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

であるから、①、②より求める a の値の範囲は、

$$1 \leq a \leq \frac{6}{5}, 2 \leq a \leq 3$$

である。

$$(\text{答}) \ 1 \leq a \leq \frac{6}{5}, 2 \leq a \leq 3$$

(1)

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 + 2ax + b \\ &= 3\left(x + \frac{a}{3}\right)^2 - \frac{a^2}{3} + b \end{aligned}$$

であるから、 $f'(x)$ は $x = -\frac{a}{3}$ のとき、最小値 $-\frac{a^2}{3} + b$ をとる。ここで 接線の傾きと $f'(x)$ の値

は一致するから、その最小値も一致し $-\frac{a^2}{3} + b = 0 \Leftrightarrow b = \frac{a^2}{3}$ が成り立つ。

(証明終)

(2)

$f\left(-\frac{a}{3}\right) = -\frac{a^3}{27}$ であるから、曲線 C を x 軸方向に $\frac{a}{3}$ 、 y 軸方向に $\frac{a^3}{27}$ だけ平行移動させた曲線の方程式は、

$$\begin{aligned} y - \frac{a^3}{27} &= f\left(x - \frac{a}{3}\right) \\ \Leftrightarrow y &= \left(x - \frac{a}{3}\right)^3 + a\left(x - \frac{a}{3}\right)^2 + \frac{a^2}{3}\left(x - \frac{a}{3}\right) + \frac{a^3}{27} \\ \Leftrightarrow y &= x^3 \end{aligned}$$

となる。これより、曲線 C を平行移動すると曲線 $y = x^3$ に一致することが示された。

(証明終)

(3)

$a = 3$ のとき、曲線 C は $y = x^3 + 3x^2 + 3x$ となる。このとき、

$$f'(x) = 3x^2 + 6x + 3$$

であるから、曲線 C 上の点 $(-2, f(-2))$ における接線の方程式は、

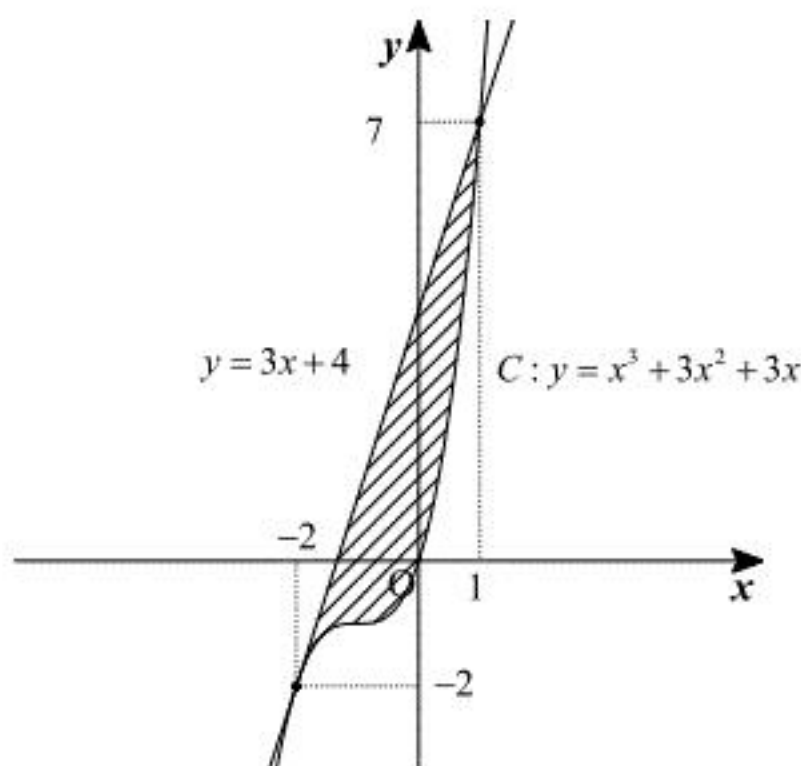
$$\begin{aligned} y &= f'(-2)(x + 2) + f(-2) \\ \Leftrightarrow y &= 3x + 4 \end{aligned}$$

である。この接線と曲線 C の共有点の x 座標は

$$\begin{aligned} x^3 + 3x^2 + 3x &= 3x + 4 \\ \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 - 4 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x + 2)^2(x - 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= -2, 1 \end{aligned}$$

である。以上より、曲線 C 上の点 $(-2, f(-2))$ における接線と曲線 C で囲まれる図形は以下の

斜線部の通りになる。



上図より、求める面積は

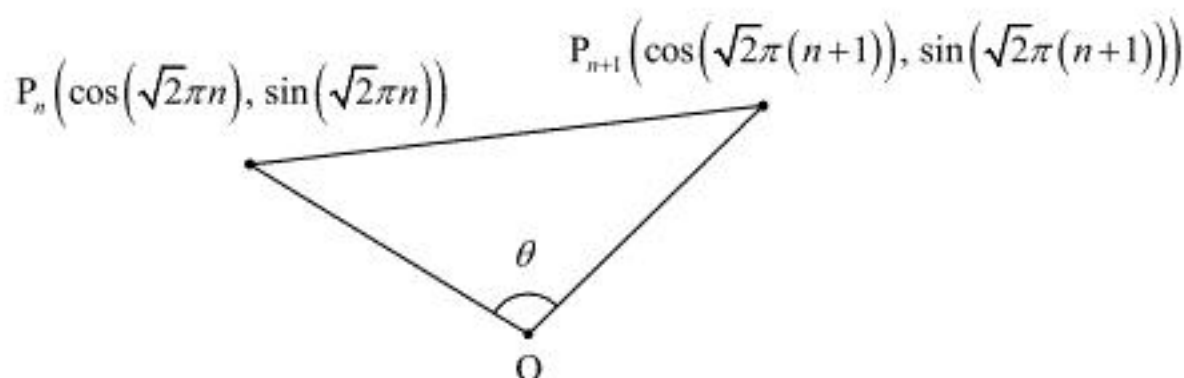
$$\begin{aligned} \int_{-2}^1 \{3x + 4 - (x^3 + 3x^2 + 3x)\} dx &= \int_{-2}^1 (-x^3 - 3x^2 + 4) dx \\ &= \left[-\frac{1}{4}x^4 - x^3 + 4x \right]_{-2}^1 \\ &= \left(-\frac{1}{4} - 1 + 4 \right) - (-4 + 8 - 8) \\ &= \frac{27}{4} \end{aligned}$$

である。

(答) $\frac{27}{4}$

(1)

$\theta = \angle P_n O P_{n+1}$ ($0 < \theta < \pi$) とする。以下に、 $\triangle O P_n P_{n+1}$ を図示する



$\pi < \sqrt{2}\pi < 2\pi$ であるから $\theta = (2 - \sqrt{2})\pi$ である。したがって、 $\triangle O P_n P_{n+1}$ の面積は、

$$\frac{1}{2} O P_n \cdot O P_{n+1} \cdot \sin \angle O P_n P_{n+1} = \frac{1}{2} \sin(2 - \sqrt{2})\pi$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{1}{2} \sin(2 - \sqrt{2})\pi$$

(2)

背理法を利用して、自然数 n と m が異なるならば、 P_n と P_m は異なることを示す。すなわち、ある異なる自然数 n と m で P_n と P_m が一致するものが存在すると仮定して矛盾を導く。このとき、仮定からある整数 k を用いて、

$$\sqrt{2}m\pi = \sqrt{2}n\pi + 2k\pi$$

となる k が存在する。これを変形すると、

$$\sqrt{2}m\pi = \sqrt{2}n\pi + 2k\pi$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}(m-n) = 2k$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2} = \frac{2k}{m-n} \quad (\because m \neq n)$$

となるが、左辺は $\sqrt{2}$ で無理数であり、 $2k$ と $m-n$ が整数であるから右辺は有理数となる。これより、仮定は誤りであり、自然数 n と m は異なるならば P_n と P_m は異なることが示された。

(証明終)

(1)

P_1 は「ステップ1まではAもBも中が白球3個にならず、ステップ2で初めてAの中が白球3個になる」確率であり、ステップ1で赤球、ステップ2で白球を移動させる場合に限るから

$$P_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$$

と求まる。 P_2 は「ステップ3まではAもBも中が白球3個にならず、ステップ4で初めてAの中が白球3個になる」確率であり、ステップ1からステップ3まで赤球、ステップ4で白球を移動させる場合に限るから

$$P_2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{81}$$

と求まる。 P_n は「ステップ $2n-1$ まではAもBも中が白球3個にならず、ステップ $2n$ で初めてAの中が白球3個になる」確率であり、ステップ1からステップ $2n-1$ まで赤球、ステップ $2n$ で白球を移動させる場合に限るから

$$P_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{2n-1} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9^n}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad P_1 = \frac{2}{9}, P_2 = \frac{2}{81}, P_n = \frac{2}{9^n}$$

(2)

(1)より

$$\begin{aligned} P_1 + P_2 + \cdots + P_n &= \sum_{k=1}^n \frac{2}{9^k} \\ &= \frac{2}{9} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{9}\right)^n}{1 - \frac{1}{9}} \\ &= \frac{1}{4} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{9}\right)^n \right\} \end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad P_1 + P_2 + \cdots + P_n = \frac{1}{4} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{9}\right)^n \right\}$$

(3)

(2)より、与式は、

$$\begin{aligned} \frac{1643}{6573} &< P_1 + P_2 + \cdots + P_n \\ \Leftrightarrow \frac{1643}{6573} &< \frac{1}{4} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{9}\right)^n \right\} \\ \Leftrightarrow \frac{6572}{6573} &< 1 - \left(\frac{1}{9}\right)^n \\ \Leftrightarrow 6573 &< 9^n \end{aligned}$$

と変形できる。ここで、

$$9^4 = 6561 < 6573$$

$$9^5 = 59049 > 6573$$

であるから、条件を満たす n のうち最小のものは $n=5$ である。

$$(\text{答}) \quad n=5$$

(1)

G は $\triangle ABC$ の重心であるから

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$$

と表せる。したがって

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PX} &= \overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OP} \\ &= s\overrightarrow{OG} - t\vec{c} \\ &= \frac{s}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) - t\vec{c} \\ &= \frac{s}{3}\vec{a} + \frac{s}{3}\vec{b} + \left(\frac{s}{3} - t\right)\vec{c}\end{aligned}$$

と表せる。

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{PX} = \frac{s}{3}\vec{a} + \frac{s}{3}\vec{b} + \left(\frac{s}{3} - t\right)\vec{c}$$

(2)

点 M は直線 PX 上にあるから実数 u を用いて

$$\overrightarrow{PM} = u\overrightarrow{PX}$$

と表せる。このとき

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM} &= \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PM} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} &= t\vec{c} + u\overrightarrow{PX} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} &= t\vec{c} + u\left\{\frac{s}{3}\vec{a} + \frac{s}{3}\vec{b} + \left(\frac{s}{3} - t\right)\vec{c}\right\} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} &= \frac{us}{3}(\vec{a} + \vec{b}) + \left\{\frac{us}{3} + (1-u)t\right\}\vec{c} \quad \dots \textcircled{1}\end{aligned}$$

となる。また、点 M は線分 AB 上にあるから、実数 v ($0 < v < 1$) を用いて

$$\overrightarrow{OM} = v\vec{a} + (1-v)\vec{b} \quad \dots \textcircled{2}$$

と表せる。 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ は同一平面上にないから、①、②の各係数を比較すると、

$$\begin{cases} \frac{us}{3} = v & \dots \textcircled{3} \\ \frac{us}{3} = 1-v & \dots \textcircled{4} \\ \frac{us}{3} + (1-u)t = 0 & \dots \textcircled{5} \end{cases}$$

が得られる。③、④より $v = \frac{1}{2}$ となるから、

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$$

であり、2 点 P, X を結ぶ直線と線分 AB の交点 M は線分 AB の中点であることが示された。

(証明終)

(3)

$s = \frac{6}{7}$ のとき、③より

$$u = \frac{3}{2s} = \frac{3}{2} \cdot \frac{7}{6} = \frac{7}{4}$$

である。さらに、⑤より

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} + \left(1 - \frac{7}{4}\right)t &= 0 \\ \Leftrightarrow t &= \frac{2}{3}\end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad t = \frac{2}{3}$$