

(1)

命題「自然数  $m$  と  $n$  が異なるならば、点  $P_m$  と点  $P_n$  は異なる」の対偶

「点  $P_m$  と点  $P_n$  が同一の点であるならば、 $n=m$  である」・・・①

を示せばよい。  $P_n$  と  $P_m$  が同一の点であるとする、整数  $k$  を用いて、

$$\sqrt{2}\pi n = \sqrt{2}\pi m + 2\pi k$$

$$\Leftrightarrow n-m = \sqrt{2}k \quad \text{・・・②}$$

が成り立つ。②の左辺は有理数であり、右辺は  $k=0$  のときのみ有理数であるから、 $k=0$  すなわち  $n=m$  であることが必要である。逆に、 $n=m$  のとき  $k=0$  であるから、これは十分性を満たす。したがって、命題①は示され、同時に題意も示された。

(証明終)

(2)

点  $P_n$  が  $x < -\frac{1}{\sqrt{2}}$  の範囲に属するとき、自然数  $k$  を用いて

$$\cos(\sqrt{2}\pi n) < -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{4}\pi + 2\pi k < \sqrt{2}\pi n < \frac{5}{4}\pi + 2\pi k$$

と表せる。各辺に  $\sqrt{2}\pi$  を加えると、

$$\left(\frac{3}{4} + \sqrt{2}\right)\pi + 2\pi k < \sqrt{2}\pi(n+1) < \left(\frac{5}{4} + \sqrt{2}\right)\pi + 2\pi k$$

となり、 $\frac{1}{2} < \sqrt{2} < \frac{3}{2}$  であることに注目すると、

$$\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\right)\pi + 2\pi k < \sqrt{2}\pi(n+1) < \left(\frac{5}{4} + \frac{3}{2}\right)\pi + 2\pi k$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{4}\pi + 2\pi k < \sqrt{2}\pi(n+1) < \frac{3}{4}\pi + 2\pi(k+1)$$

が成り立つ。このとき、 $\cos\{\sqrt{2}\pi(n+1)\} \geq -\frac{1}{\sqrt{2}}$  であるから、点  $P_{n+1}$  は  $x \geq -\frac{1}{\sqrt{2}}$  に属する。こ

れより、点  $P_n$  が  $x < -\frac{1}{\sqrt{2}}$  の範囲に属するときは点  $P_{n+1}$  が  $x \geq -\frac{1}{\sqrt{2}}$  に属するとわかる。いま、

$x \geq -\frac{1}{\sqrt{2}}$  に属する点が有限個だと仮定すると、 $x < -\frac{1}{\sqrt{2}}$  に属する点も有限個である。ここで、

(1)より、自然数の数だけ異なる点  $P_n$  が存在することに注意すると、異なる点  $P_n$  は無限に多

く存在するから、仮定は誤りであり、 $x \geq -\frac{1}{\sqrt{2}}$  に属する点は無限に多く存在することが示さ

れた。

(証明終)

(1)

$f(x)$  を  $x$  について微分すると

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{-x} - xe^{-x} \\ &= (1-x)e^{-x} \end{aligned}$$

となる。これより、 $f(x)$  の増減表は以下のようになる。

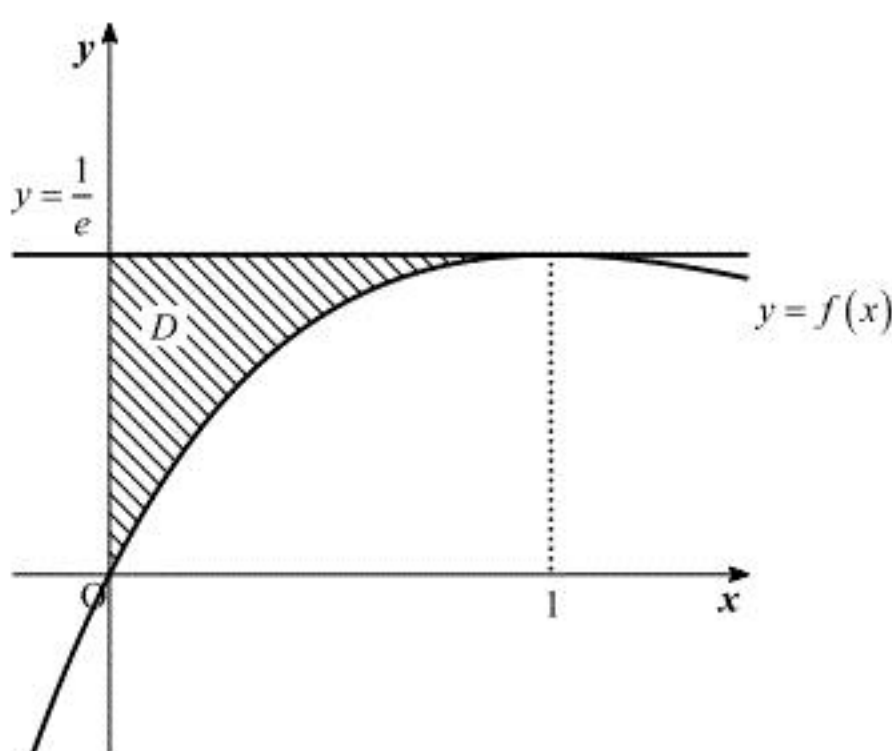
|         |            |               |            |
|---------|------------|---------------|------------|
| $x$     | $\cdots$   | 1             | $\cdots$   |
| $f'(x)$ | +          | 0             | -          |
| $f(x)$  | $\nearrow$ | $\frac{1}{e}$ | $\searrow$ |

上表より、すべての実数  $x$  について、不等式  $f(x) \leq \frac{1}{e}$  が成り立つことが示された。

(証明終)

(2)

(1)の結果を用いると、領域  $D$  は以下の斜線部で図示される。



上図より、求める面積は部分積分法を用いて、

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 \left( \frac{1}{e} - xe^{-x} \right) dx \\ &= \left[ \frac{1}{e}x \right]_0^1 - \left[ -xe^{-x} \right]_0^1 - \int_0^1 e^{-x} dx \\ &= \frac{2}{e} - \left[ -e^{-x} \right]_0^1 \\ &= \frac{3}{e} - 1 \end{aligned}$$

である。

(答)  $\frac{3}{e} - 1$ 

(3)

(2)の図より、求める体積を  $V$  とすると  $V = \int_0^{\frac{1}{e}} \pi x^2 dy$  である。ここで、 $y = xe^{-x}$  であるから、

$\frac{dy}{dx} = (1-x)e^{-x}$  であり、積分区間は以下のようになる。

|     |   |               |               |
|-----|---|---------------|---------------|
| $y$ | 0 | $\rightarrow$ | $\frac{1}{e}$ |
| $x$ | 0 | $\rightarrow$ | 1             |

よって、

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{\frac{1}{e}} \pi x^2 dy \\ &= \int_0^1 \pi x^2 (1-x)e^{-x} dx \\ &= \pi \int_0^1 (x^2 e^{-x} - x^3 e^{-x}) dx \end{aligned}$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^2 e^{-x} dx &= \left[ x^2 (-e^{-x}) \right]_0^1 + \int_0^1 2xe^{-x} dx \\ &= -\frac{1}{e} + \left[ 2x(-e^{-x}) \right]_0^1 + \int_0^1 2e^{-x} dx \\ &= -\frac{3}{e} + \left[ -2e^{-x} \right]_0^1 \\ &= -\frac{5}{e} + 2 \end{aligned}$$

であり、

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^3 e^{-x} dx &= \left[ x^3 (-e^{-x}) \right]_0^1 + \int_0^1 3x^2 e^{-x} dx \\ &= -\frac{1}{e} + 3 \int_0^1 x^2 e^{-x} dx \\ &= -\frac{1}{e} + 3 \left( -\frac{5}{e} + 2 \right) \\ &= -\frac{16}{e} + 6 \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^1 (x^2 e^{-x} - x^3 e^{-x}) dx \\ &= \pi \left\{ \left( -\frac{5}{e} + 2 \right) - \left( -\frac{16}{e} + 6 \right) \right\} \\ &= \left( \frac{11}{e} - 4 \right) \pi \end{aligned}$$

と求まる。

(答)  $\left( \frac{11}{e} - 4 \right) \pi$

(1)

複素数  $z$  の実数部分を  $\operatorname{Re}\{z\}$  と表す。ド・モアブルの定理より

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^6 = \cos 6\theta + i \sin 6\theta$$

である。ここで、この実数部分に注目すると、

$$\begin{aligned} \cos 6\theta &= \operatorname{Re}\{(\cos \theta + i \sin \theta)^6\} \\ &= \operatorname{Re}\left\{\sum_{k=0}^6 {}_6C_k (i \sin \theta)^k \cos^{6-k} \theta\right\} \\ &= {}_6C_0 \cos^6 \theta - {}_6C_2 \sin^2 \theta \cos^4 \theta + {}_6C_4 \sin^4 \theta \cos^2 \theta - {}_6C_6 \sin^6 \theta \\ &= t^6 - 15(1-t^2)t^4 + 15(1-t^2)^2 t^2 - (1-t^2)^3 \\ &= 32t^6 - 48t^4 + 18t^2 - 1 \end{aligned}$$

であるから、 $f_6(t) = 32t^6 - 48t^4 + 18t^2 - 1$  である。

$$(\text{答}) \quad f_6(t) = 32t^6 - 48t^4 + 18t^2 - 1$$

(2)

(1)と同様に、ド・モアブルの定理より

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^{2m} = \cos 2m\theta + i \sin 2m\theta$$

であるから、この実数部分に注目すると、

$$\begin{aligned} f_{2m}(t) &= \operatorname{Re}\{(\cos \theta + i \sin \theta)^{2m}\} \\ &= \operatorname{Re}\left\{\sum_{k=0}^{2m} {}_{2m}C_k (i \sin \theta)^k \cos^{2m-k} \theta\right\} \\ &= \sum_{l=0}^m {}_{2m}C_{2l} (-\sin^2 \theta)^l \cos^{2(m-l)} \theta \\ &= \sum_{l=0}^m {}_{2m}C_{2l} (t^2 - 1)^l t^{2(m-l)} \end{aligned}$$

である。これより、 $f_{2m}(t)$  の  $t^{2m}$  の係数は

$$\sum_{l=0}^m {}_{2m}C_{2l} = {}_{2m}C_0 + {}_{2m}C_2 + {}_{2m}C_4 + \cdots + {}_{2m}C_{2m}$$

であることがわかる。ここで、

$${}_{2m}C_0 + {}_{2m}C_1 + {}_{2m}C_2 + \cdots + {}_{2m}C_{2m} = (1+1)^{2m} = 2^{2m} \quad \cdots \textcircled{1}$$

$${}_{2m}C_0 - {}_{2m}C_1 + {}_{2m}C_2 - \cdots + {}_{2m}C_{2m} = (1-1)^{2m} = 0 \quad \cdots \textcircled{2}$$

であるから、 $\textcircled{1} + \textcircled{2}$ より、

$$\begin{aligned} 2({}_{2m}C_0 + {}_{2m}C_2 + {}_{2m}C_4 + \cdots + {}_{2m}C_{2m}) &= 2^{2m} \\ \Leftrightarrow \sum_{l=0}^m {}_{2m}C_{2l} &= 2^{2m-1} \end{aligned}$$

である。以上より、 $f_{2m}(t)$  の  $t^{2m}$  の係数は  $2^{2m-1}$  である。

$$(\text{答}) \quad 2^{2m-1}$$

(3)

$f_n(t) = \cos n\theta$  の両辺を  $\theta$  で微分すると、 $t = \cos \theta$  であるから、

$$-\sin \theta f'_n(t) = -n \sin n\theta \Leftrightarrow \sin \theta f'_n(t) = n \sin n\theta$$

が得られる。したがって、

$$\begin{aligned} f_n(t)^2 + (1-t^2) \left\{ \frac{1}{n} f'_n(t) \right\}^2 &= (\cos n\theta)^2 + (1-\cos^2 \theta) \left\{ \frac{1}{n} f'_n(t) \right\}^2 \\ &= (\cos n\theta)^2 + \frac{1}{n^2} \{ \sin \theta f'_n(t) \}^2 \\ &= (\cos n\theta)^2 + (\sin n\theta)^2 \\ &= 1 \end{aligned}$$

となるから、与式は成り立つことが示された。

(証明終)

(1)

$a^2 + b^2 = c^2$  より,  $a^2 = c^2 - b^2 = (c-b)(c+b)$  となる。 $a^2 > 0$  であり,  $b$  と  $c$  の差が1であるから,  $c-b=1$  であるとわかる。よって,

$$\begin{aligned} a^2 &= c+b \\ \Leftrightarrow a^2 &= 2b+1 \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

が得られる。また,  $a-b=1$  のとき,

$$\textcircled{1} \Leftrightarrow (b+1)^2 = 2b+1$$

$$\Leftrightarrow b=0$$

となり, これは  $b$  が自然数であることに反するから不適である。一方,  $b-a=1$  のとき,

$$\textcircled{1} \Leftrightarrow a^2 = 2(a+1)+1 = 2a+3$$

$$\Leftrightarrow a^2 - 2a - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (a+1)(a-3) = 0$$

となり,  $a$  は自然数であるから  $a=3$  と求まる。以上より, 求める  $(a, b, c)$  の組は,

$$(a, b, c) = (3, 4, 5)$$

の1組である。

(答)  $(a, b, c) = (3, 4, 5)$

(2)

(1)と同様に,  $c-b=1$  および $\textcircled{1}$ が得られる。ここで,  $b$  は2の累乗であるから, 自然数  $n$  を用いて  $b=2^n$  と表すことができる。また,  $\textcircled{1}$ の右辺は奇数であるから, 左辺の  $a^2$  すなわち  $a$  も奇数であり, 自然数  $k$  を用いて  $a=2k-1$  と表すことができる。これらを $\textcircled{1}$ に代入すると,

$$\begin{aligned} (2k-1)^2 &= 2^{n+1} + 1 \\ \Leftrightarrow 4k^2 - 4k + 1 &= 2^{n+1} + 1 \\ \Leftrightarrow k^2 - k &= 2^{n-1} \\ \Leftrightarrow k(k-1) &= 2^{n-1} \quad \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

となる。ここで,  $\textcircled{2}$ の右辺は2以外の素因数を持たないから, 左辺  $k(k-1)$  も2以外の素因数を持たない。よって,  $k, k-1$  が連続する2つの負でない整数であることと, 右辺が正であることに注意すると,

$$「k=2」 \text{ かつ } 「k-1=1」$$

のみが $\textcircled{2}$ を満たす。このとき,  $n=2$  であり, 求める  $(a, b, c)$  の組は,

$$(a, b, c) = (3, 4, 5)$$

の1組である。

(答)  $(a, b, c) = (3, 4, 5)$

(1)

点 G は  $\triangle ABC$  の重心であるから、 $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$  である。よって、 $\overrightarrow{PX}$  は

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PX} &= \overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OP} \\ &= s\overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OP} \\ &= \frac{s}{3}\vec{a} + \frac{s}{3}\vec{b} + \left(\frac{s}{3} - t\right)\vec{c}\end{aligned}$$

と表せる。

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{PX} = \frac{s}{3}\vec{a} + \frac{s}{3}\vec{b} + \left(\frac{s}{3} - t\right)\vec{c}$$

(2)

3 点 P, M, X は同一直線上にあるから、(1)より実数  $p$  を用いて

$$\overrightarrow{PM} = p\overrightarrow{PX} = \frac{ps}{3}\vec{a} + \frac{ps}{3}\vec{b} + \left(\frac{ps}{3} - pt\right)\vec{c}$$

が成り立つ。これより、

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PM} = \frac{ps}{3}\vec{a} + \frac{ps}{3}\vec{b} + \left(\frac{ps}{3} - pt + t\right)\vec{c}$$

となる。点 M は平面 OAB 上の点であるから、 $\vec{c}$  の係数は 0 に等しく

$$\frac{ps}{3} - pt + t = 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

が成り立ち、さらに点 M は直線 AB 上の点であるから、 $\vec{a}, \vec{b}$  の係数の和は 1 に等しく

$$\begin{aligned}\frac{ps}{3} + \frac{ps}{3} &= 1 \\ \Leftrightarrow \frac{ps}{3} &= \frac{1}{2} \quad \dots \textcircled{2}\end{aligned}$$

が成り立つ。以上①, ②より、

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$$

であるから、点 M は線分 AB の中点であることが示された。

(証明終)

(3)

ベクトル  $\overrightarrow{CX}$  は

$$\overrightarrow{CX} = \overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OC} = \frac{s}{3}\vec{a} + \frac{s}{3}\vec{b} + \left(\frac{s}{3} - 1\right)\vec{c}$$

と表せる。ここで、 $NX:XC=2:5$  であるから、ベクトル  $\overrightarrow{CN}$  は

$$\overrightarrow{CN} = \frac{7}{5}\overrightarrow{CX} = \frac{7s}{15}\vec{a} + \frac{7s}{15}\vec{b} + \left(\frac{7s}{15} - \frac{7}{5}\right)\vec{c}$$

と表せる。よって、

$$\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CN} = \frac{7s}{15}\vec{a} + \frac{7s}{15}\vec{b} + \left(\frac{7s}{15} - \frac{2}{5}\right)\vec{c}$$

である。点 N は平面 OAB 上の点であるから、 $\vec{c}$  の係数は 0 に等しく

$$\frac{7s}{15} - \frac{2}{5} = 0 \Leftrightarrow s = \frac{6}{7}$$

とわかる。一方、ベクトル  $\overrightarrow{OX}$  は

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OX} &= s\overrightarrow{OG} \\ &= \frac{s}{3}\vec{a} + \frac{s}{3}\vec{b} + \frac{s}{3}\vec{c} \\ &= \frac{s}{3}\vec{a} + \frac{s}{3}\vec{b} + \frac{s}{3t}\overrightarrow{OP}\end{aligned}$$

と表すことができ、点 X は平面 ABP 上の点であるから、

$$\begin{aligned}\frac{s}{3} + \frac{s}{3} + \frac{s}{3t} &= 1 \\ \Leftrightarrow 2s + \frac{s}{t} &= 3 \\ \Leftrightarrow \frac{s}{t} &= 3 - 2s \\ \therefore t &= \frac{2}{3} \left( \because s = \frac{6}{7} \right)\end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad (s, t) = \left( \frac{6}{7}, \frac{2}{3} \right)$$