

1

(1)

放物線 C および直線 L_1 の式から y を消去すると $a \neq 0$ より 2 次方程式

$$\begin{aligned} a(x-1)^2 + \frac{1}{a} &= x \\ \Leftrightarrow ax^2 - (2a+1)x + a + \frac{1}{a} &= 0 \quad \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

が得られる。①の判別式を D_1 とすると、放物線 C と直線 L_1 が異なる 2 点で交わる時、式①は異なる 2 つの解を持つから、求める a の値の範囲は、

$$\begin{aligned} D_1 &> 0 \\ \Leftrightarrow (2a+1)^2 - 4a\left(a + \frac{1}{a}\right) &> 0 \\ \Leftrightarrow 4a - 3 &> 0 \\ \Leftrightarrow a &> \frac{3}{4} \end{aligned}$$

である。

(答) $a > \frac{3}{4}$

(2)

(1)において、放物線 C と直線 L_1 の異なる 2 つの交点を $A(\alpha, \alpha)$, $B(\beta, \beta)$ ($\alpha < \beta$) とする。ここで、 α, β は式①の 2 解であるから解と係数の関係より

$$\begin{cases} \alpha + \beta = \frac{2a+1}{a} = 2 + \frac{1}{a} \\ \alpha\beta = \frac{a + \frac{1}{a}}{a} = 1 + \frac{1}{a^2} \end{cases}$$

が成り立ち、

$$\begin{aligned} (\beta - \alpha)^2 &= (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta \\ &= \left(2 + \frac{1}{a}\right)^2 - 4\left(1 + \frac{1}{a^2}\right) \\ &= \frac{4a - 3}{a^2} \end{aligned}$$

が得られる。放物線 C が直線 L_1 から切り取る線分の長さ ℓ は

$$\ell = \sqrt{(\beta - \alpha)^2 + (\beta - \alpha)^2} = \sqrt{2(\beta - \alpha)^2}$$

であり、 $\sqrt{2} \leq \ell \leq \sqrt{\frac{5}{2}}$ について、各辺正であるから 2 乗すると、

$$\begin{aligned} 2 &\leq \ell^2 \leq \frac{5}{2} \\ \Leftrightarrow 2a^2 &\leq 2(4a - 3) \leq \frac{5}{2}a^2 \quad (\because a^2 > 0) \\ \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (a-1)(a-3) \leq 0 \\ (5a-6)(a-2) \leq 0 \end{array} \right. \\ \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 1 \leq a \leq 3 \\ \frac{3}{4} < a \leq \frac{6}{5}, 2 \leq a \end{array} \right. \end{aligned}$$

となる。したがって、求める a の値の範囲は

$$1 \leq a \leq \frac{6}{5}, 2 \leq a \leq 3$$

である。

(答) $1 \leq a \leq \frac{6}{5}, 2 \leq a \leq 3$

(3)

点 $(1, 0)$ を通り傾き m の直線 L_2 の方程式は

$$y = m(x-1)$$

である。放物線 C および直線 L_2 の式から y を消去すると、 $a \neq 0$ より 2 次方程式

$$\begin{aligned} a(x-1)^2 + \frac{1}{a} &= m(x-1) \\ \Leftrightarrow ax^2 - (2a+m)x + a + \frac{1}{a} + m &= 0 \quad \cdots \textcircled{2} \end{aligned}$$

が得られる。②の判別式を D_2 とすると、放物線 C と直線 L_2 が接するとき、式②が重解を持つから、

$$\begin{aligned} D_2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (2a+m)^2 - 4a\left(a + \frac{1}{a} + m\right) &= 0 \\ \Leftrightarrow m^2 - 4 &= 0 \\ \Leftrightarrow (m+2)(m-2) &= 0 \\ \Leftrightarrow m &= \pm 2 \end{aligned}$$

となる。以上より、 m は a に無関係な値となる。

(証明終)

また、このときの接点の座標を (X, Y) とすると、②より、

$$\begin{aligned} X &= \frac{2a+m}{2a} = 1 + \frac{m}{2a} = 1 + \frac{\pm 2}{2a} = 1 \pm \frac{1}{a} \\ Y &= m(X-1) = \pm 2\left(1 \pm \frac{1}{a} - 1\right) = \frac{2}{a} \end{aligned}$$

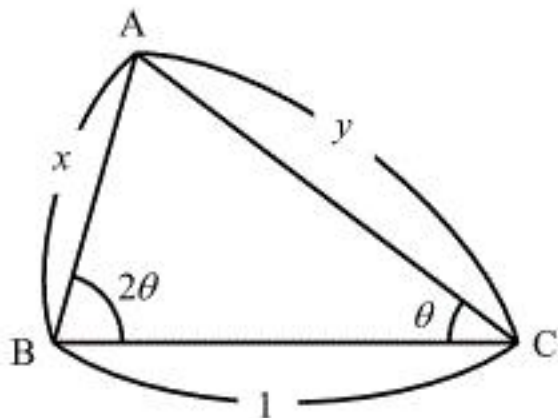
となる。

(答) $\left(1 + \frac{1}{a}, \frac{2}{a}\right), \left(1 - \frac{1}{a}, \frac{2}{a}\right)$

2

(1)

以下に△ABCを図示する。



△ABCの内角について、 $0 < \theta + 2\theta < \pi \Leftrightarrow 0 < \theta < \frac{\pi}{3}$ であるから、

$$\frac{1}{2} < \cos \theta < 1, 0 < \sin \theta < \frac{\sqrt{3}}{2}$$

である。△ABCについて正弦定理より

$$\begin{aligned} \frac{y}{\sin 2\theta} &= \frac{x}{\sin \theta} \\ \Leftrightarrow \frac{y}{x} &= \frac{\sin 2\theta}{\sin \theta} \\ \Leftrightarrow \frac{y}{x} &= \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{\sin \theta} \\ \Leftrightarrow \frac{y}{x} &= 2 \cos \theta \end{aligned}$$

と求まる。

(答) $\frac{y}{x} = 2 \cos \theta$

(2)

△ABCについて余弦定理より

$$x^2 = 1 + y^2 - 2y \cos \theta \quad \cdot \cdot \cdot \textcircled{2}$$

$$y^2 = 1 + x^2 - 2x \cos 2\theta \quad \cdot \cdot \cdot \textcircled{3}$$

が得られる。②+③より、

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 2 + x^2 + y^2 - 2(x \cos 2\theta + y \cos \theta) \\ \Leftrightarrow x \cos 2\theta + y \cos \theta &= 1 \end{aligned}$$

となる。よって、 $x \cos 2\theta + y \cos \theta$ は θ に無関係な値1をとる。

(証明終)

(3)

①より

$$y = 2x \cos \theta$$

であり、(2)に代入すると、

$$\begin{aligned} x \cos 2\theta + y \cos \theta &= 1 \\ \Leftrightarrow x \cos 2\theta + 2x \cos^2 \theta &= 1 \\ \Leftrightarrow x(4 \cos^2 \theta - 1) &= 1 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{1}{4 \cos^2 \theta - 1} \left(\because \cos \theta > \frac{1}{2} \right) \end{aligned}$$

となる。これより、

$$y = 2x \cos \theta = \frac{2 \cos \theta}{4 \cos^2 \theta - 1}$$

である。

(答) $x = \frac{1}{4 \cos^2 \theta - 1}, y = \frac{2 \cos \theta}{4 \cos^2 \theta - 1}$

(4)

(3)より

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\theta} &= -\frac{8 \cos \theta (-\sin \theta)}{(4 \cos^2 \theta - 1)^2} \\ &= \frac{8 \sin \theta \cos \theta}{(4 \cos^2 \theta - 1)^2} \\ \frac{dy}{d\theta} &= \frac{(-2 \sin \theta)(4 \cos^2 \theta - 1) - 2 \cos \theta \cdot 8 \cos \theta (-\sin \theta)}{(4 \cos^2 \theta - 1)^2} \\ &= \frac{\sin \theta (8 \cos^2 \theta + 2)}{(4 \cos^2 \theta - 1)^2} \end{aligned}$$

となるから

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} \\ &= \frac{\frac{\sin \theta (8 \cos^2 \theta + 2)}{(4 \cos^2 \theta - 1)^2}}{\frac{8 \sin \theta \cos \theta}{(4 \cos^2 \theta - 1)^2}} \\ &= \frac{4 \cos^2 \theta + 1}{4 \cos \theta} \end{aligned}$$

である。これより、曲線 $x = f(\theta)$ 、 $y = g(\theta)$ 上の点 $\left(f\left(\frac{\pi}{6}\right), g\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$ での接線の傾きは

$$\frac{4 \cos^2 \frac{\pi}{6} + 1}{4 \cos \frac{\pi}{6}} = \frac{4 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + 1}{4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{3 + 1}{2\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

である。したがって、

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\pi}{6}\right) &= \frac{1}{4 \cos^2 \frac{\pi}{6} - 1} = \frac{1}{4 \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 1} = \frac{1}{2} \\ g\left(\frac{\pi}{6}\right) &= \frac{2 \cos \theta}{4 \cos^2 \frac{\pi}{6} - 1} = \frac{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{4 \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 1} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

であるから、求める接線の式は

$$\begin{aligned} y &= \frac{2}{\sqrt{3}} \left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \Leftrightarrow y &= \frac{2\sqrt{3}}{3}x + \frac{\sqrt{3}}{6} \end{aligned}$$

である。

(答) $y = \frac{2\sqrt{3}}{3}x + \frac{\sqrt{3}}{6}$

3

(1)

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 \cdot e^{-x} + x \cdot (-e^{-x}) \\ &= (1-x)e^{-x} \end{aligned}$$

であるから、 $f(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$

よって、すべての実数 x について

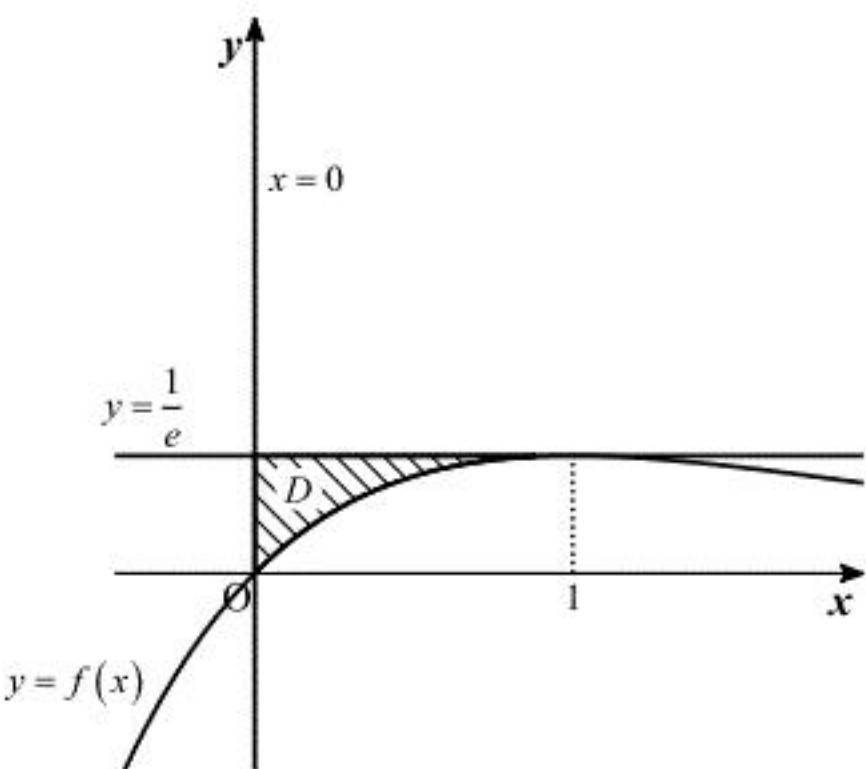
$$f(x) \leq f(1) = \frac{1}{e}$$

が成り立つ。

(証明終)

(2)

(1)より、曲線 $y = f(x)$ と 2 直線 $x = 0, y = \frac{1}{e}$ で囲まれた部分 D は、下図の斜線部である。



領域 D の面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= 1 \cdot \frac{1}{e} - \int_0^1 f(x) dx \\ &= \frac{1}{e} - \int_0^1 xe^{-x} dx \\ &= \frac{1}{e} - \left[x \cdot (-e^{-x}) \right]_0^1 + \int_0^1 e^{-x} dx \\ &= \frac{1}{e} - \left(-\frac{1}{e} + 0 \right) + \left[-e^{-x} \right]_0^1 \\ &= \frac{3}{e} - 1 \end{aligned}$$

と求まる。

(答) $\frac{3}{e} - 1$

(3)

(2)の D を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を V とする。いま、

$$g(x) = xe^{-x} \quad (0 \leq x \leq 1)$$

を定義すると、(1)より $y = g(x)$ は定義域内で単調増加しておりその逆関数が定義できる。この逆関数を

$$x = h(y) \quad (0 \leq y \leq \frac{1}{e})$$

とすると、体積 V は、

$$V = \pi \int_0^{\frac{1}{e}} \{h(y)\}^2 dy$$

と表せる。ここで、

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = (1-x)e^{-x}$$

であり、 x と y の対応関係は以下の表の通りである。

y	0	$\rightarrow$	$\frac{1}{e}$
x	0	$\rightarrow$	1

よって、 V は

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^{\frac{1}{e}} \{h(y)\}^2 dy \\ &= \pi \int_0^1 x^2 \cdot (1-x) e^{-x} dx \\ &= \pi \int_0^1 (-x^3 + x^2) (-e^{-x})' dx \\ &= \pi \left[(-x^3 + x^2) (-e^{-x}) \right]_0^1 + \pi \int_0^1 (-3x^2 + 2x) (-e^{-x})' dx \\ &= \pi \left[(-3x^2 + 2x) (-e^{-x}) \right]_0^1 + \pi \int_0^1 (-6x + 2) (-e^{-x})' dx \\ &= \frac{1}{e} \pi + \pi \left[(-6x + 2) (-e^{-x}) \right]_0^1 - \pi \int_0^1 (-6) (-e^{-x}) dx \\ &= \frac{1}{e} \pi + \frac{4}{e} \pi + 2\pi - \pi \left[-6e^{-x} \right]_0^1 \\ &= \frac{5}{e} \pi + 2\pi + \frac{6}{e} \pi - 6\pi \\ &= \pi \left(\frac{11}{e} - 4 \right) \end{aligned}$$

と求まる。

(答) $\pi \left(\frac{11}{e} - 4 \right)$

(1)

P_1 は「ステップ1まではAもBも中が白球3個にならず、ステップ2で初めてAの中が白球3個になる」確率であり、ステップ1で赤球、ステップ2で白球を移動させる場合に限るから

$$P_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$$

と求まる。 P_2 は「ステップ3まではAもBも中が白球3個にならず、ステップ4で初めてAの中が白球3個になる」確率であり、ステップ1からステップ3まで赤球、ステップ4で白球を移動させる場合に限るから

$$P_2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{81}$$

と求まる。 P_n は「ステップ $2n-1$ まではAもBも中が白球3個にならず、ステップ $2n$ で初めてAの中が白球3個になる」確率であり、ステップ1からステップ $2n-1$ まで赤球、ステップ $2n$ で白球を移動させる場合に限るから

$$P_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{2n-1} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9^n}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad P_1 = \frac{2}{9}, P_2 = \frac{2}{81}, P_n = \frac{2}{9^n}$$

(2)

(1)より

$$\begin{aligned} P_1 + P_2 + \cdots + P_n &= \sum_{k=1}^n \frac{2}{9^k} \\ &= \frac{2}{9} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{9}\right)^n}{1 - \frac{1}{9}} \\ &= \frac{1}{4} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{9}\right)^n \right\} \end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad P_1 + P_2 + \cdots + P_n = \frac{1}{4} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{9}\right)^n \right\}$$

(3)

(2)より、与式は、

$$\begin{aligned} \frac{1643}{6573} &< P_1 + P_2 + \cdots + P_n \\ \Leftrightarrow \frac{1643}{6573} &< \frac{1}{4} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{9}\right)^n \right\} \\ \Leftrightarrow \frac{6572}{6573} &< 1 - \left(\frac{1}{9}\right)^n \\ \Leftrightarrow 6573 &< 9^n \end{aligned}$$

と変形できる。ここで、

$$9^4 = 6561 < 6573$$

$$9^5 = 59049 > 6573$$

であるから、条件を満たす n のうち最小のものは $n=5$ である。

$$(\text{答}) \quad n=5$$

(1)

Gは△ABCの重心であるから

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$$

と表せる。したがって

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PX} &= \overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OP} \\ &= s\overrightarrow{OG} - t\vec{c} \\ &= \frac{s}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) - t\vec{c} \\ &= \frac{s}{3}\vec{a} + \frac{s}{3}\vec{b} + \left(\frac{s}{3} - t\right)\vec{c}\end{aligned}$$

と表せる。

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{PX} = \frac{s}{3}\vec{a} + \frac{s}{3}\vec{b} + \left(\frac{s}{3} - t\right)\vec{c}$$

(2)

点Mは直線PX上にあるから実数 u を用いて

$$\overrightarrow{PM} = u\overrightarrow{PX}$$

と表せる。このとき

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM} &= \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PM} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} &= t\vec{c} + u\overrightarrow{PX} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} &= t\vec{c} + u\left\{\frac{s}{3}\vec{a} + \frac{s}{3}\vec{b} + \left(\frac{s}{3} - t\right)\vec{c}\right\} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} &= \frac{us}{3}(\vec{a} + \vec{b}) + \left\{\frac{us}{3} + (1-u)t\right\}\vec{c} \quad \dots\dots ①\end{aligned}$$

となる。また、点Mは線分AB上にあるから、実数 v ($0 < v < 1$)を用いて

$$\overrightarrow{OM} = v\vec{a} + (1-v)\vec{b} \quad \dots\dots ②$$

と表せる。 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ は同一平面上にないから、①、②の各係数を比較すると、

$$\begin{cases} \frac{us}{3} = v & \dots\dots ③ \\ \frac{us}{3} = 1-v & \dots\dots ④ \\ \frac{us}{3} + (1-u)t = 0 & \dots\dots ⑤ \end{cases}$$

が得られる。③、④より $v = \frac{1}{2}$ となるから、

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$$

であり、2点P, Xを結ぶ直線と線分ABの交点Mは線分ABの中点であることが示された。

(証明終)

(3)

$s = \frac{6}{7}$ のとき、③より

$$u = \frac{3}{2s} = \frac{3}{2} \cdot \frac{7}{6} = \frac{7}{4}$$

である。さらに、⑤より

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} + \left(1 - \frac{7}{4}\right)t &= 0 \\ \Leftrightarrow t &= \frac{2}{3}\end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad t = \frac{2}{3}$$