’18

前期日程

数　学　問　題

（理工学部）

注　意　事　項

1. 試験開始の合図があるまで，この『数学問題』を開いてはいけません。
2. この中には，問題文を含む5枚の解答用紙と2枚の計算用紙があります。試験開始後，問題に落丁，乱丁，印刷不鮮明の箇所等があった場合は申し出てください。
3. 氏名と受験番号は，すべての解答用紙の所定の欄に必ず記入してください。
4. 5枚の解答用紙のみを回収しますので，この表紙と2枚の計算用紙は持ち帰ってください。
5. 解答用紙の裏面は計算等の下書きに使用しても構いませんが，解答は各問題の下の解答欄に記入し，裏面は解答に使用しないでください。解答用紙の裏面に解答してもその部分は採点しません。

計 算 用 紙 (1)

計 算 用 紙 (2)

数　　　学

氏名	

受験番号	

1 $a \neq 0$ とし，放物線 $y = a(x-1)^2 + \dfrac{1}{a}$ を C，直線 $y = x$ を L_1 とする。また，点 $(1, 0)$ を通り傾き m の直線を L_2 とする。このとき以下の問いに答えよ。

(1) 放物線 C と直線 L_1 が異なる 2 点で交わるように a の値の範囲を求めよ。

(2) (1) において，放物線 C が直線 L_1 から切り取る線分の長さを ℓ とする。$\sqrt{2} \leqq \ell \leqq \sqrt{\dfrac{5}{2}}$ となるように，a の値の範囲を求めよ。

(3) 放物線 C と直線 L_2 が接するとき，m は a に無関係な値となることを示せ。またそのときの接点の座標を求めよ。

[解答欄]

得点	

数　　学

氏名	

受験番号	

2　$\triangle$ABC において，BC $=1$， $\angle$ABC $=2\theta$，$\angle$ACB $=\theta$ であるとする。 AB の長さを x，AC の長さを y とするとき，以下の問いに答えよ。

(1) $\dfrac{y}{x}$ を θ を用いて表せ。

(2) $x\cos 2\theta + y\cos\theta$ は θ に無関係な値であることを示せ。

(3) x，y を θ を用いて表せ。

(4) $x=f(\theta)$，$y=g(\theta)$ とするとき，xy 平面における曲線 $x=f(\theta)$，$y=g(\theta)$ 上の点 $\left(f\left(\dfrac{\pi}{6}\right), g\left(\dfrac{\pi}{6}\right)\right)$ での接線の方程式を求めよ。

[解答欄]

得点	

数　　学

氏名	

受験番号	

3　関数 $f(x) = xe^{-x}$ について以下の問いに答えよ。

(1)　すべての実数 x について，不等式 $f(x) \leqq \dfrac{1}{e}$ が成り立つことを証明せよ。

(2)　曲線 $y = f(x)$ と 2 直線 $x = 0,\ y = \dfrac{1}{e}$ で囲まれた部分 D の面積を求めよ。

(3)　(2) の D を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ。

[解答欄]

得点	

数　　学

氏名		受験番号	

4　AとBの2つの箱がある。最初にAには白球2個と赤球1個，Bには白球2個が入っている。
次のステップで球を移動する。

ステップ1： Aから1個を取りBに入れる。　ステップ2： Bから1個を取りAに入れる。

ステップ3： Aから1個を取りBに入れる。　ステップ4： Bから1個を取りAに入れる。

以下同様に，ステップ100までを行う。

自然数 n $(1 \leqq n \leqq 50)$ に対し P_n を『ステップ $2n-1$ まではAもBも中が白球3個にならず，ステップ $2n$ で初めてAの中が白球3個になる』確率とする。このとき以下の問いに答えよ。

(1) P_1，P_2 および P_n をそれぞれ求めよ。

(2) $\mathrm{P}_1 + \mathrm{P}_2 + \cdots + \mathrm{P}_n$ を求めよ。

(3) $\dfrac{1643}{6573} < \mathrm{P}_1 + \mathrm{P}_2 + \cdots + \mathrm{P}_n$ を満たす自然数 n のうち最小のものを求めよ。

[解答欄]

得点	

数　　学

氏名	

受験番号	

5 四面体 OABC において △ABC の重心を G とし，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とする。辺 OC 上に点 P をとり，$\overrightarrow{OP}=t\vec{c}$ $(0<t<1)$ とする。さらに △ABP と線分 OG との交点を X とし，$\overrightarrow{OX}=s\overrightarrow{OG}$ $(0<s<1)$ とする。
このとき以下の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{PX}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ と t, s を用いて表せ。

(2) 2点 P, X を結ぶ直線と線分 AB との交点 M が線分 AB の中点であることを証明せよ。

(3) $s=\dfrac{6}{7}$ のとき，t の値を求めよ。

[解答欄]

得点	