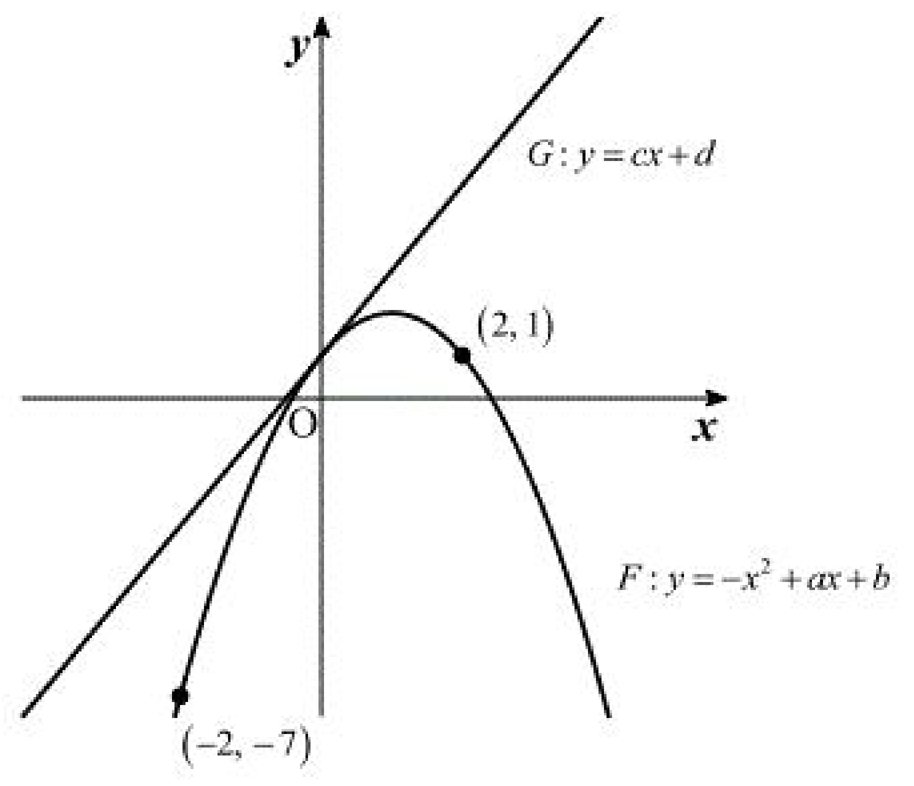
1

(1)



F は $(-2, -7), (2, 1)$ を通るから,

$$\begin{cases} -7=-4-2a+b \\ 1=-4+2a+b \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} b-2a=-3 \\ b+2a=5 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=1 \end{cases}$$

となる。

(答) $a=2, b=1$

(2)

$F: y=-x^2+2x+1$ と $G: y=cx+d$ を連立した式

$$-x^2+2x+1=cx+d$$
$$\Leftrightarrow x^2+(c-2)x+d-1=0$$

が重解を持てばよい。判別式を D とすると,

$$D=(c-2)^2-4(d-1)$$
$$=c^2-4c-4d+8$$

である。この方程式が重解を持つ条件は $D=0$ であるから,

$$c^2-4c-4d+8=0$$
$$\Leftrightarrow d=\frac{1}{4}c^2-c+2$$

となる。

(答) $d=\frac{1}{4}c^2-c+2$

(3)

F の方程式より,

$$y=-x^2+2x+1$$
$$=-(x-1)^2+2$$

であるから, F の頂点の座標は $(1, 2)$ である。 F を平行移動して頂点 $(0, 0)$ の放物線 $y=-x^2$ と重なるとき, x 軸方向に -1, y 軸方向に -2 移動させている。いま, G の方程式は,

$$y=cx+\frac{1}{4}c^2-c+2$$

であり, これを平行移動した式は,

$$y+2=c(x+1)+\frac{1}{4}c^2-c+2$$
$$\Leftrightarrow y=cx+\frac{1}{4}c^2$$

である。これが G と重なるとき, y 切片を比較して,

$$\frac{1}{4}c^2=\frac{1}{4}c^2-c+2$$
$$\Leftrightarrow c=2$$

を得る。したがって, (2)の結果より,

$$d=\frac{1}{4}\cdot 2^2-2+2=1$$

となる。

(答) $c=2, d=1$

(4)

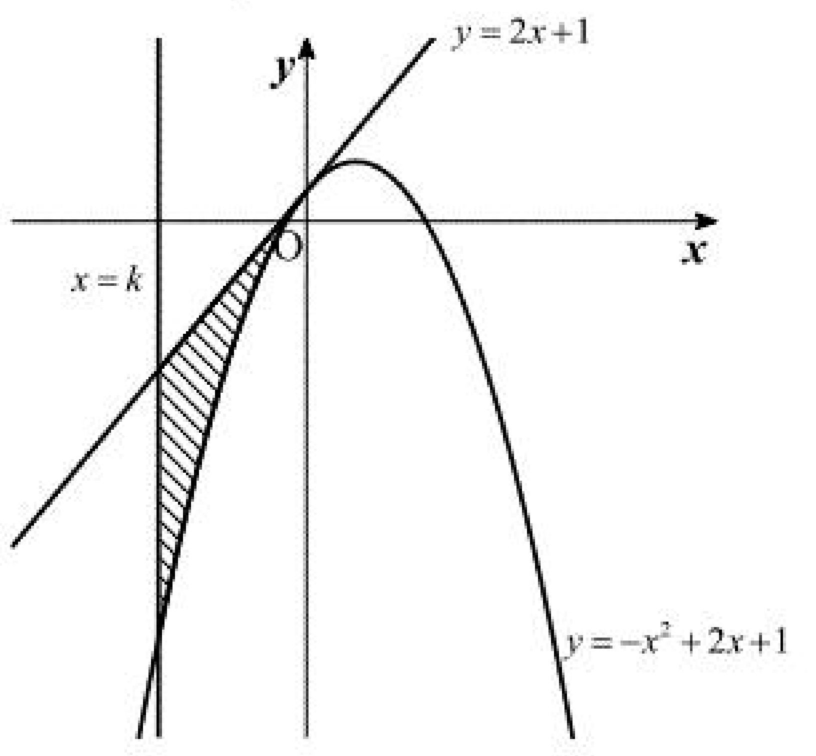
$y=-x^2+2x+1$ と $y=2x+1$ の交点は,

$$\begin{cases} y=-x^2+2x+1 \\ y=2x+1 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2=0 \\ y=2x+1 \end{cases}$$
$$\therefore (x, y)=(0, 1)$$

である。そこで, k の符号によって場合分けをする。

[1] $k<0$ のとき

図示をすると以下のようになる。



斜線部の面積は,

$$\int_k^0 \{(2x+1)-(-x^2+2x+1)\}dx=\int_k^0 x^2dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_k^0$$
$$=-\frac{1}{3}k^3$$

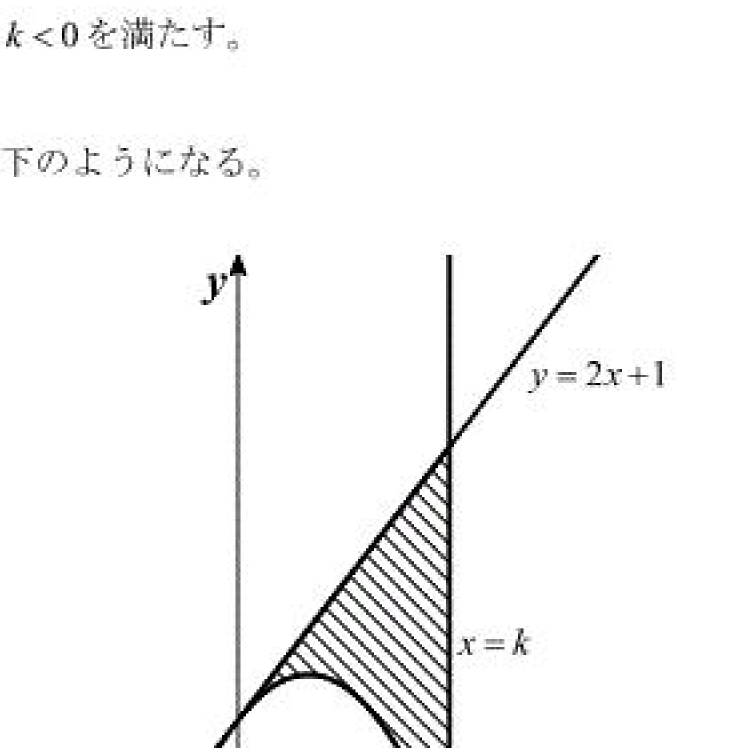
となり, これが9に等しいから,

$$-\frac{1}{3}k^3=9$$
$$\Leftrightarrow k^3=-27$$
$$\Leftrightarrow k=-3$$

である。これは $k<0$ を満たす。

[2] $k>0$ のとき

図示をすると以下のようになる。



斜線部の面積は,

$$\int_0^k \{(2x+1)-(-x^2+2x+1)\}dx=\int_0^k x^2dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^k$$
$$=\frac{1}{3}k^3$$

である。これが9に等しいから,

$$\frac{1}{3}k^3=9$$
$$\Leftrightarrow k^3=27$$
$$\Leftrightarrow k=3$$

となる。これは $k>0$ を満たす。

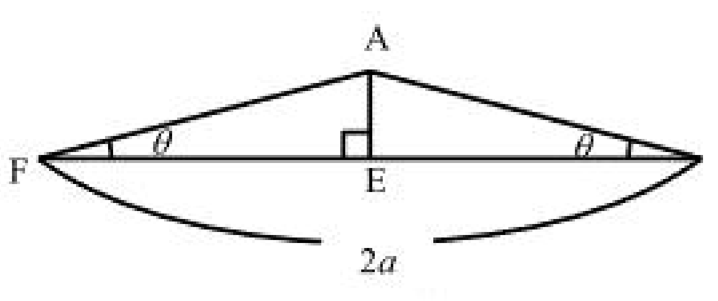
[3] $k=0$ のとき

囲まれた面積は0となるから題意を満たさない。

以上[1], [2], [3]より, 求める k は, $k=\pm 3$ である。

$\boxed{2}$

(1)



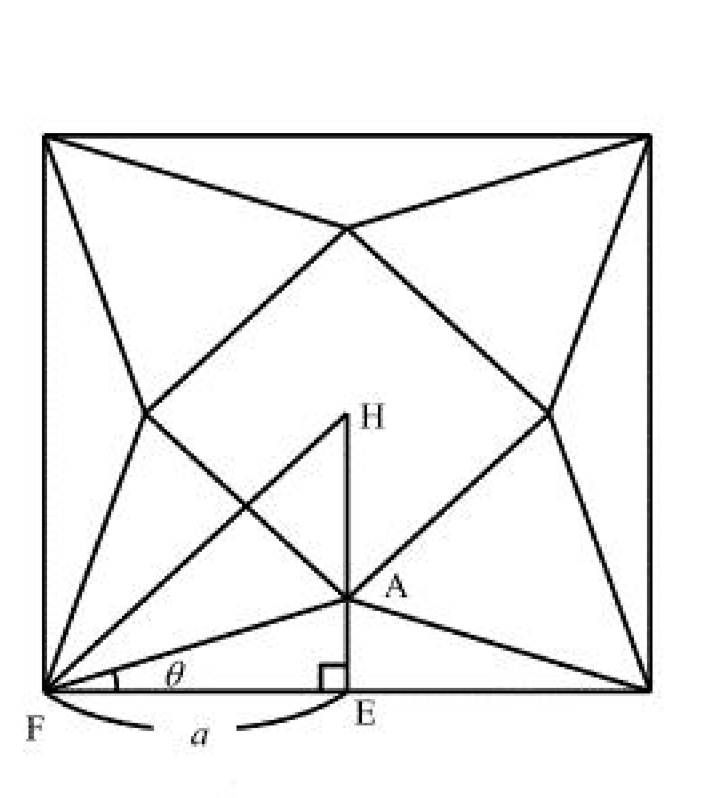
切り取る二等辺三角形のうちの1つについて，上図のように，Aから対辺に下した垂線の足をEとし，頂点の1つをFとする。このとき，求める面積は，△AEFの面積の2倍なので，

$$
\begin{aligned}
2\cdot\frac{1}{2}\cdot \mathrm{FE}\cdot\mathrm{AE} &= \mathrm{FE}\cdot\mathrm{AE}\\
&= a\cdot a\tan\theta\\
&= a^2\tan\theta
\end{aligned}
$$

となる。

(答)　$a^2\tan\theta$

(2)



上図のように，正方形の中心をHとすると，△FEHは直角二等辺三角形であるから，

$$\mathrm{HE}=a$$

であり，(1)より

$$\mathrm{AE}=a\tan\theta$$

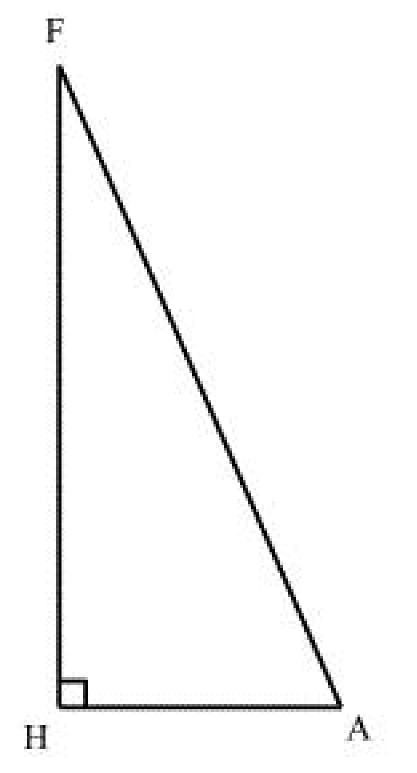
であるから，

$$\mathrm{HA}=a(1-\tan\theta)$$

となる。さらに，

$$\mathrm{FA}=\frac{a}{\cos\theta}$$

である。そして，正四角錐を組み立てたとき，以下の図の通り，Fから底面に下した垂線の足はHであるから，高さはFHであらわされる。



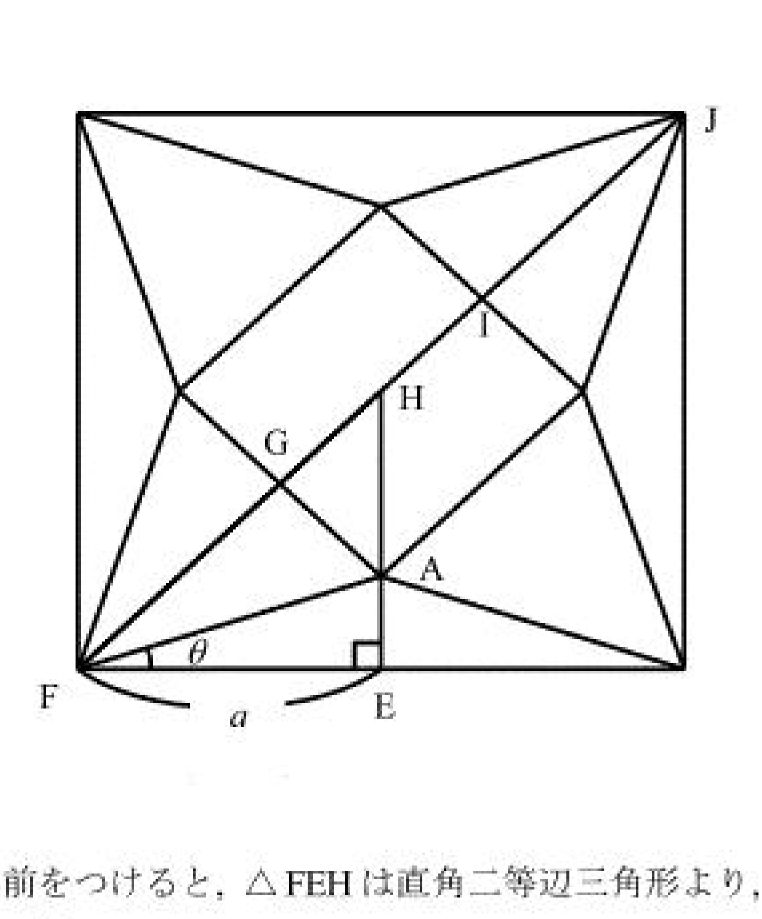
正四角錐を組み立てたときの直角三角形FHAに三平方の定理を用いると，

$$
\begin{aligned}
\mathrm{FH} &= \sqrt{\mathrm{FA}^2-\mathrm{HA}^2}\\
&= \sqrt{\left(\frac{a}{\cos\theta}\right)^2 - a^2(1-\tan\theta)^2}\\
&= \sqrt{a^2\left(\frac{1}{\cos^2\theta}-1+2\tan\theta-\tan^2\theta\right)}\\
&= \sqrt{a^2\left(\frac{1}{\cos^2\theta}-\frac{1}{\cos^2\theta}+2\tan\theta\right)}\left(\because 1+\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}\right)\\
&= a\sqrt{2\tan\theta}
\end{aligned}
$$

を得る。

(答)　$a\sqrt{2\tan\theta}$

(3)



上図のように点に名前をつけると，△FEHは直角二等辺三角形より，

$$\mathrm{FH}=\sqrt{2}\mathrm{FE}=\sqrt{2}a$$

である。$\angle\mathrm{GHA}=45°$, $\angle\mathrm{HGA}=90°$ より△AGHも直角二等辺三角形であり，(2)より

$$\mathrm{HA}=a(1-\tan\theta)=\frac{2}{3}a\left(\because \tan\theta=\frac{1}{3}\right)$$

であるから，

$$\mathrm{HG}=\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{HA}=\frac{\sqrt{2}}{3}a$$

である。よって，

$$
\begin{aligned}
\mathrm{FG} &= \mathrm{FH}-\mathrm{HG}\\
&= \sqrt{2}a-\frac{\sqrt{2}}{3}a\\
&= \frac{2\sqrt{2}}{3}a
\end{aligned}
$$

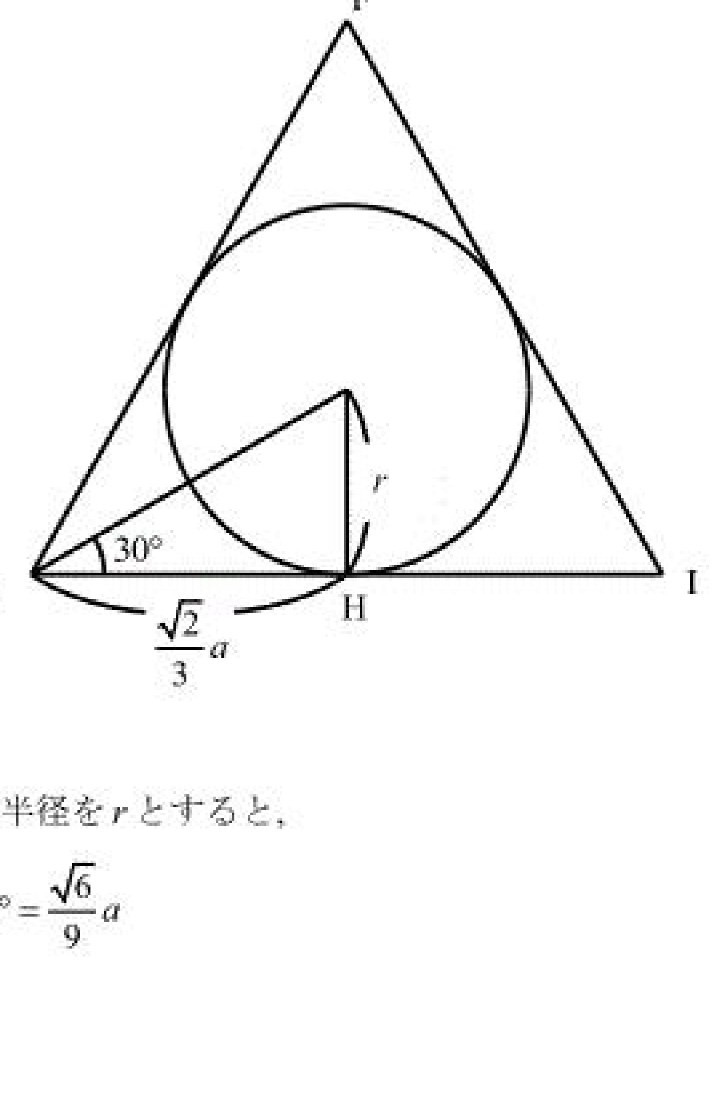
となる。一方でHはGIの中点より，

$$\mathrm{GI}=2\mathrm{HG}=\frac{2\sqrt{2}}{3}a$$

となる。ゆえに，

$$\mathrm{FG}=\mathrm{GI}$$

である。対称性を考慮するとFG = IJなので，正四角錐を平面FGIで切断した断面は正三角形となる。球と正四角錐との接点は線分FG, GI, IJ上に1つずつ存在するので，断面は以下のようになる。



上図より，求める球の半径をrとすると，

$$r=\frac{\sqrt{2}}{3}a\tan 30°=\frac{\sqrt{6}}{9}a$$

である。

(答)　$\frac{\sqrt{6}}{9}a$

$\boxed{3}$

(1)

$S_1 = a_1$ であるから，S_n の式に $n=1$ を代入すると，

$$\begin{aligned} & S_1 = a_1^{\ 2} + 1 \cdot a_1 - 4 \\ \Leftrightarrow\ & a_1 = a_1^{\ 2} + a_1 - 4 \\ \Leftrightarrow\ & a_1^{\ 2} = 4 \\ \Leftrightarrow\ & a_1 = \pm 2 \end{aligned}$$

である。そして $a_1 > 0$ より，

$$a_1 = 2$$

を得る。

(答) $a_1 = 2$

(2)

$$\begin{aligned} & S_{n+1} = a_{n+1}^{\ 2} + (n+1)a_{n+1} - 4 \\ & S_n = a_n^{\ 2} + na_n - 4 \end{aligned}$$

の辺々を引いて，

$$\begin{aligned} & S_{n+1} - S_n = a_{n+1}^{\ 2} - a_n^{\ 2} + a_{n+1} + n(a_{n+1} - a_n) \\ \Leftrightarrow\ & a_{n+1} = a_{n+1}^{\ 2} - a_n^{\ 2} + a_{n+1} + n(a_{n+1} - a_n) \\ \Leftrightarrow\ & a_{n+1}^{\ 2} - a_n^{\ 2} + n(a_{n+1} - a_n) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & (a_{n+1} + a_n)(a_{n+1} - a_n) + n(a_{n+1} - a_n) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & (a_{n+1} - a_n)(a_{n+1} + a_n + n) = 0 \end{aligned}$$

を得る。$a_{n+1} \neq a_n$ であるから，

$$a_{n+1} + a_n + n = 0$$

である。$n = 2k,\ 2k+1$ をそれぞれ代入すると，

$$\begin{aligned} & \begin{cases} a_{2k+1} + a_{2k} + 2k = 0 \\ a_{2k+2} + a_{2k+1} + 2k + 1 = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow\ & \begin{cases} b_{k+1} + c_k + 2k = 0 \\ c_{k+1} + b_{k+1} + 2k + 1 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

となる。b_{k+1} を消去すると，

$$c_{k+1} - c_k = -1$$

となる。これは，数列 $\{c_n\}$ が等差数列であり，その公差が -1 であることを表す。$\{c_n\}$ の初項 a_2 を考え，S_n の式に $n=2$ を代入すると，

$$\begin{aligned} & S_2 = a_2^{\ 2} + 2a_2 - 4 \\ \Leftrightarrow\ & a_1 + a_2 = a_2^{\ 2} + 2a_2 - 4 \\ \Leftrightarrow\ & 2 + a_2 = a_2^{\ 2} + 2a_2 - 4 \\ \Leftrightarrow\ & a_2^{\ 2} + a_2 - 6 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & (a_2 + 3)(a_2 - 2) = 0 \end{aligned}$$

であり，$a_2 \neq a_1 = 2$ であるから，$a_2 = c_1 = -3$ である。よって，$n \geqq 2$ のとき，

$$\begin{aligned} c_n &= c_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (c_{k+1} - c_k) \\ &= -3 - (n-1) \\ &= -n - 2\ (n = 2, 3. \cdots) \end{aligned}$$

となり，$n=1$ のとき，$c_1 = -3 = -1-2$ となるので，$n \geqq 1$ において $c_n = -n-2$ である。また，$b_{k+1} + c_k + 2k = 0$ にこれを代入すると，

$$\begin{aligned} & b_{k+1} + (-k-2) + 2k = 0 \\ \Leftrightarrow\ & b_{k+1} = -k + 2 \end{aligned}$$

となる。$k+1$ を n で置き換えると，

$$b_n = -(n-1) + 2 = -n + 3$$

となる。

(答) $b_n = -n+3,\ c_n = -n-2$

(3)

$n = 1, 2, \cdots$ において，$c_n < 0$ であるから，$b_n = 0$ となるときを考える。このとき，

$$\begin{aligned} & b_n = 0 \\ \Leftrightarrow\ & -n + 3 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & n = 3 \end{aligned}$$

であるから，求める k は，

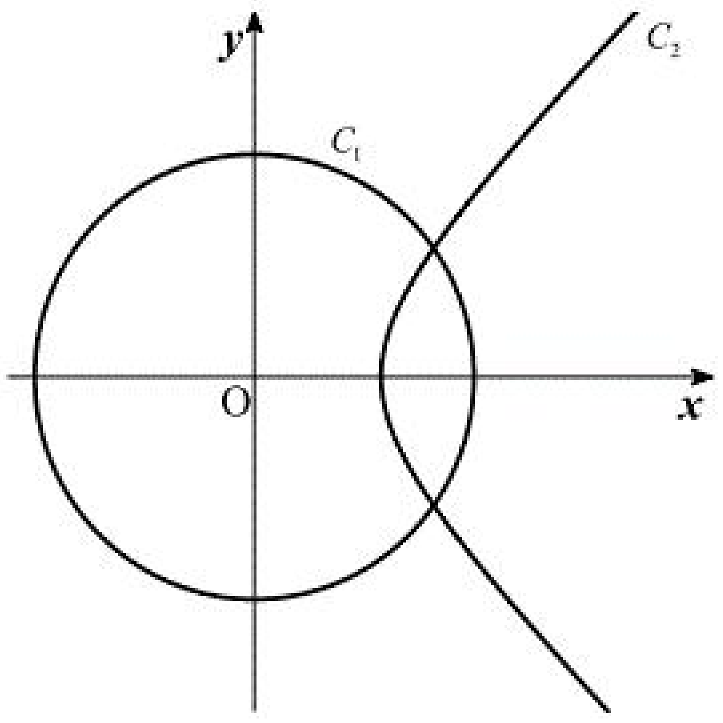
$$2k - 1 = 3 \Leftrightarrow k = 5$$

である。

(答) 5

4

(1)



C_2の式について，$-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$の範囲で$0<\cos\theta \leqq 1$である。よって，

$$1 \leqq \frac{1}{\cos\theta}=x$$

である。$1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$を利用すると，$C_2$の式は，

$$x^2-y^2=1\,(x \geqq 1)$$

となる。これとC_1の方程式$x^2+y^2=3$を連立し，yを消去すると，

$$2x^2=4 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{2}$$

となり，$x \geqq 1$なので，$x=\sqrt{2}$を得る。ここで，交点は第1象限にあることから$y>0$を考慮してC_2の式からyを求めると，

$$\begin{aligned}&2-y^2=1\\ \Leftrightarrow\ &y^2=1\\ \Leftrightarrow\ &y=1\end{aligned}$$

となる。よって，求める交点は$\left(\sqrt{2},1\right)$である。

(答) $\left(\sqrt{2},1\right)$

(2)

C_2は双曲線の一部なので，双曲線の接線の公式を用いると，接線の方程式は

$$\sqrt{2}x-y=1 \Leftrightarrow y=\sqrt{2}x-1$$

となる。

(答) $y=\sqrt{2}x-1$

(3)

C_1, C_2をyの関数x_1, x_2とみると，

$$x_1{}^2=3-y^2,\ x_2{}^2=1+y^2$$

となる。求める体積は，立体のx軸に関する対称性を考慮して，

$$\begin{aligned}2\cdot\pi\int_0^1\left(x_1{}^2-x_2{}^2\right)dy &= 2\pi\int_0^1\left\{\left(3-y^2\right)-\left(1+y^2\right)\right\}dy\\ &=2\pi\int_0^1\left(2-2y^2\right)dy\\ &=4\pi\int_0^1\left(1-y^2\right)dy\\ &=4\pi\left[y-\frac{y^3}{3}\right]_0^1\\ &=4\pi\left(1-\frac{1}{3}\right)\\ &=\frac{8}{3}\pi\end{aligned}$$

となる。

(答) $\dfrac{8}{3}\pi$

5

(1)

$$\vec{e}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}}\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}$$
$$=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}$$
$$=\left(\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$$

となる。

(答) $\vec{e}=\left(\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$

(2)

Fは平面α上の点だから，$\vec{e}, \overrightarrow{\mathrm{OB}}$の一次結合で表される。よって，実数$k, l$を用いて

$$\vec{f}=k\vec{e}+l\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$
$$=\frac{k}{3}\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}+l\begin{pmatrix}3\\-4\\5\end{pmatrix}$$
$$=\left(\frac{1}{3}k+3l,-\frac{2}{3}k-4l,\frac{2}{3}k+5l\right)$$

と書ける。また，$\vec{f}\perp\overrightarrow{\mathrm{OA}}$であるから，

$$\vec{f}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=0$$
$$\Leftrightarrow\left(\frac{1}{3}k+3l,-\frac{2}{3}k-4l,\frac{2}{3}k+5l\right)\cdot(1,-2,2)=0$$
$$\Leftrightarrow\left(\frac{1}{3}k+3l\right)-2\left(-\frac{2}{3}k-4l\right)+2\left(\frac{2}{3}k+5l\right)=0$$
$$\Leftrightarrow 3k+21l=0$$
$$\Leftrightarrow k=-7l$$

である。ゆえに，

$$\vec{f}=\left(\frac{1}{3}k+3l,-\frac{2}{3}k-4l,\frac{2}{3}k+5l\right)$$
$$=\left(\frac{2}{3}l,\frac{2}{3}l,\frac{1}{3}l\right)$$
$$=\frac{1}{3}l(2,2,1)$$

となる。$\vec{f}$は単位ベクトルであるから，

$$\left|\vec{f}\right|=1$$
$$\Leftrightarrow\frac{|l|}{3}\sqrt{2^2+2^2+1^2}=1$$
$$\Leftrightarrow|l|=1$$
$$\Leftrightarrow l=\pm1$$

を得る。ここで，$\vec{f}$と$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$のなす角$\theta$は$0<\theta<\frac{\pi}{2}$を満たすので，$0<\cos\theta<1$より$\vec{f}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}>0$である。$l=1$，すなわち$\vec{f}=\frac{1}{3}(2,2,1)$のとき，$\vec{f}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\frac{1}{3}(6-8+5)=1>0$であり，$l=-1$，すなわち$\vec{f}=-\frac{1}{3}(2,2,1)$のとき，$\vec{f}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=-1<0$となるから，求めるFの座標は，$\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$である。

(答) $\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$

(3)

$$\left|\vec{p}\right|=2,\ \vec{p}\cdot\vec{e}=\frac{1}{3}(0+0+4)=\frac{4}{3},\ \vec{p}\cdot\vec{f}=\frac{1}{3}(0+0+2)=\frac{2}{3},\ \left|\vec{e}\right|=\left|\vec{f}\right|=1,\ \vec{e}\cdot\vec{f}=0$$

であるから，

$$\left|\vec{p}-\left(s\vec{e}+t\vec{f}\right)\right|^2=\left|\vec{p}\right|^2-2\vec{p}\cdot\left(s\vec{e}+t\vec{f}\right)+\left|s\vec{e}+t\vec{f}\right|^2$$
$$=\left|\vec{p}\right|^2-2\left(s\vec{p}\cdot\vec{e}+t\vec{p}\cdot\vec{f}\right)+s^2\left|\vec{e}\right|^2+2st\vec{e}\cdot\vec{f}+t^2\left|\vec{f}\right|^2$$
$$=4-2\left(s\cdot\frac{4}{3}+t\cdot\frac{2}{3}\right)+s^2+0+t^2$$
$$=s^2-\frac{8}{3}s+t^2-\frac{4}{3}t+4$$
$$=\left(s-\frac{4}{3}\right)^2+\left(t-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{16}{9}$$

と変形できる。よって，$\left|\vec{p}-\left(s\vec{e}+t\vec{f}\right)\right|$は$s=\frac{4}{3}, t=\frac{2}{3}$のとき最小値$\sqrt{\frac{16}{9}}=\frac{4}{3}$をとる。

(答) $\frac{4}{3}$