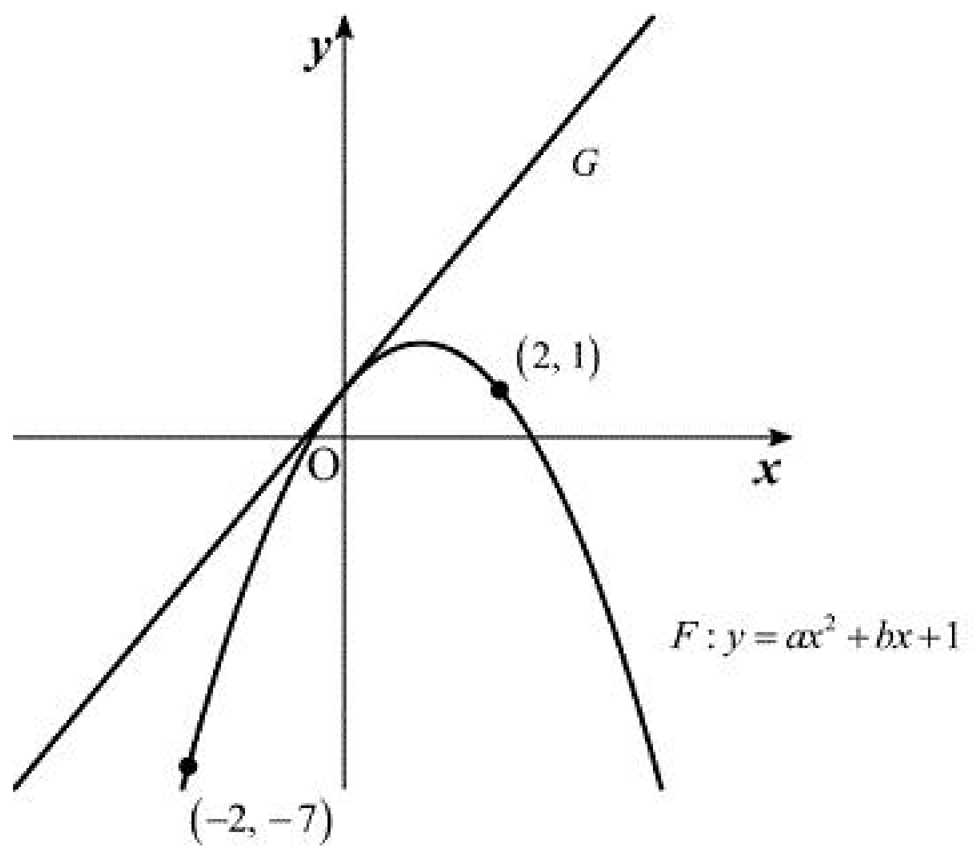
1

(1)



F は $(-2,-7)$, $(2,1)$ を通るので,

$$\begin{cases} -7 = 4a - 2b + 1 \\ 1 = 4a + 2b + 1 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4a - 2b = -8 \\ 4a + 2b = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \end{cases}$$

となる。

(答) $a=-1, b=2$

(2)

$f(x) = -x^2 + 2x + 1$ とおくと, $f'(x) = -2x + 2$ より, $f'(0) = 2$ となる。よって, 求める方程式は,

$$y = f'(0)(x-0) + 1$$
$$\Leftrightarrow y = 2x + 1$$

である。

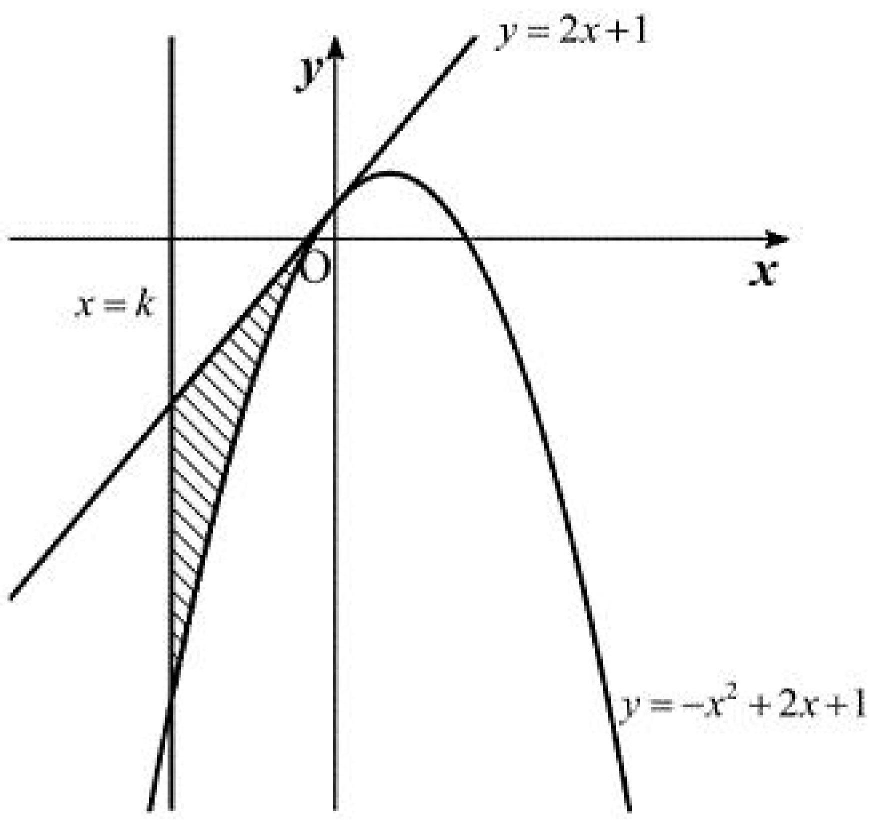
(答) $y = 2x + 1$

(3)

k の符号によって場合分けをする。

[1] $k < 0$ のとき

図示をすると以下のようになる。



斜線部の面積は,

$$\int_k^0 \left\{(2x+1) - \left(-x^2 + 2x + 1\right)\right\} dx = \int_k^0 x^2 dx$$
$$= \left[\frac{1}{3}x^3\right]_k^0$$
$$= -\frac{1}{3}k^3$$

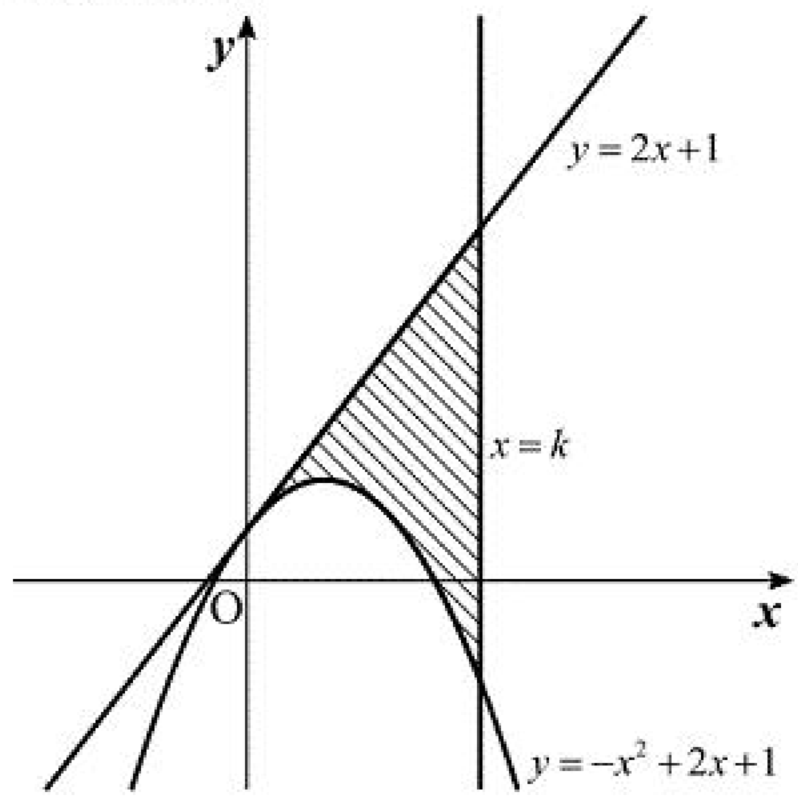
となり, これが 9 に等しいので,

$$-\frac{1}{3}k^3 = 9$$
$$\Leftrightarrow k^3 = -27$$
$$\Leftrightarrow k = -3$$

である。これは $k < 0$ を満たす。

[2] $k > 0$ のとき

図示をすると以下のようになる。



斜線部の面積は,

$$\int_0^k \left\{(2x+1) - \left(-x^2 + 2x + 1\right)\right\} dx = \int_0^k x^2 dx$$
$$= \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^k$$
$$= \frac{1}{3}k^3$$

である。これが 9 に等しいので,

$$\frac{1}{3}k^3 = 9$$
$$\Leftrightarrow k^3 = 27$$
$$\Leftrightarrow k = 3$$

となる。これは $k > 0$ を満たす。

[3] $k = 0$ のとき

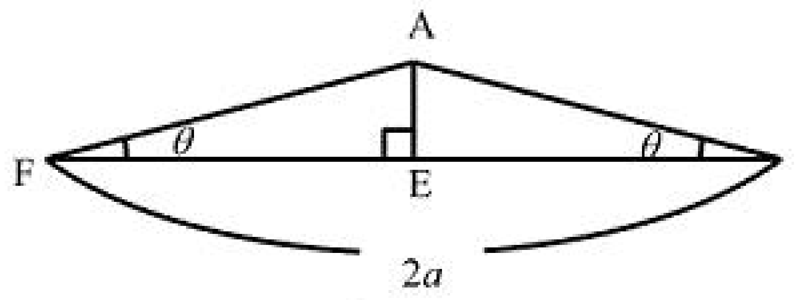
囲まれた面積は 0 となるので題意を満たさない。

以上[1], [2], [3]より, 求める k は, $k = \pm 3$ である。

(答) $k = \pm 3$

$\boxed{2}$

(1)



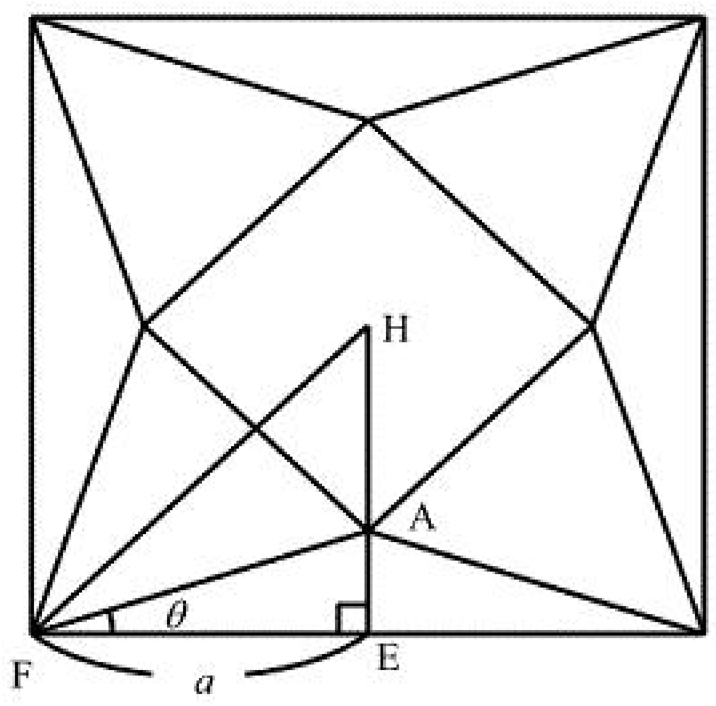
切り取る二等辺三角形のうちの1つについて，上図のように，Aから対辺に下した垂線の足をEとし，A以外の頂点のうちの1つをFとする。このとき，求める面積は，△AEFの面積の2倍なので，

$$
\begin{aligned}
2\cdot\frac{1}{2}\cdot \mathrm{FE}\cdot\mathrm{AE} &= \mathrm{FE}\cdot\mathrm{AE}\\
&= a\cdot a\tan\theta\\
&= a^2\tan\theta
\end{aligned}
$$

となる。

(答) $a^2\tan\theta$

(2)



上図のように，正方形の中心をHとすると，△FEHは直角二等辺三角形であるから，

$\mathrm{HE}=a$

であり，(1)より

$\mathrm{AE}=a\tan\theta$

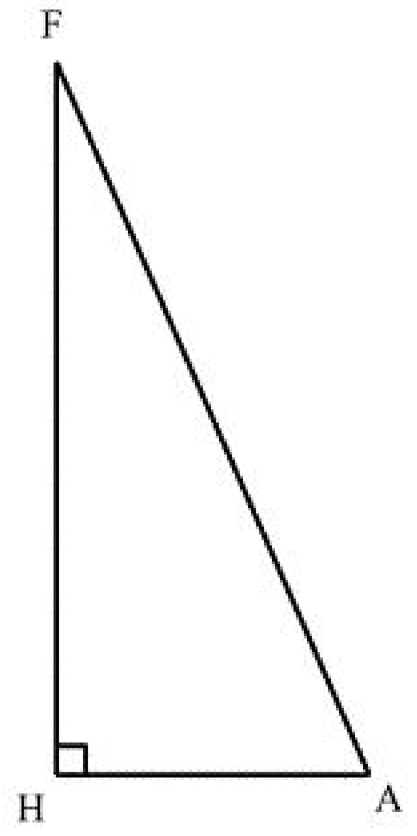
であるから，

$\mathrm{HA}=a(1-\tan\theta)$

となる。さらに，

$\mathrm{FA}=\dfrac{a}{\cos\theta}$

である。そして，正四角錐を組み立てたとき，以下の図の通り，Fから底面に下した垂線の足はHであるから，高さはFHであらわされる。



正四角錐を組み立てたときの直角三角形FHAに三平方の定理を用いると，

$$
\begin{aligned}
\mathrm{FH} &= \sqrt{\mathrm{FA}^2-\mathrm{HA}^2}\\
&= \sqrt{\left(\frac{a}{\cos\theta}\right)^2 - a^2(1-\tan\theta)^2}\\
&= \sqrt{a^2\left(\frac{1}{\cos^2\theta}-1+2\tan\theta-\tan^2\theta\right)}\\
&= \sqrt{a^2\left(\frac{1}{\cos^2\theta}-\frac{1}{\cos^2\theta}+2\tan\theta\right)} \quad \left(\because 1+\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}\right)\\
&= a\sqrt{2\tan\theta}
\end{aligned}
$$

を得る。

(答) $a\sqrt{2\tan\theta}$

$\boxed{3}$

(1)

$S_1 = a_1$ であるから，S_n の式に $n=1$ を代入すると，

$$S_1 = a_1{}^2 + 1\cdot a_1 - 4$$
$$\Leftrightarrow a_1 = a_1{}^2 + a_1 - 4$$
$$\Leftrightarrow a_1{}^2 = 4$$
$$\Leftrightarrow a_1 = \pm 2$$

である。そして $a_1 > 0$ より，

$$a_1 = 2$$

を得る。

(答) $a_1 = 2$

(2)

$$S_{n+1} = a_{n+1}{}^2 + (n+1)a_{n+1} - 4$$
$$S_n = a_n{}^2 + na_n - 4$$

の辺々を引いて，

$$S_{n+1} - S_n = a_{n+1}{}^2 - a_n{}^2 + a_{n+1} + n(a_{n+1} - a_n)$$
$$\Leftrightarrow a_{n+1} = a_{n+1}{}^2 - a_n{}^2 + a_{n+1} + n(a_{n+1} - a_n)$$
$$\Leftrightarrow a_{n+1}{}^2 - a_n{}^2 + n(a_{n+1} - a_n) = 0$$
$$\Leftrightarrow (a_{n+1} + a_n)(a_{n+1} - a_n) + n(a_{n+1} - a_n) = 0$$
$$\Leftrightarrow (a_{n+1} - a_n)(a_{n+1} + a_n + n) = 0$$

を得る。$a_{n+1} \neq a_n$ であるから，

$$a_{n+1} + a_n + n = 0$$

である。$n = 2k, 2k+1$ をそれぞれ代入すると，

$$\begin{cases} a_{2k+1} + a_{2k} + 2k = 0 \\ a_{2k+2} + a_{2k+1} + 2k + 1 = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} b_{k+1} + c_k + 2k = 0 \\ c_{k+1} + b_{k+1} + 2k + 1 = 0 \end{cases}$$

となる。b_{k+1} を消去すると，

$$c_{k+1} - c_k = -1$$

となる。これは，数列 $\{c_n\}$ が等差数列であり，その公差が -1 であることを表す。$\{c_n\}$ の初項を考えると，

$$S_2 = a_2{}^2 + 2a_2 - 4$$
$$\Leftrightarrow a_1 + a_2 = a_2{}^2 + 2a_2 - 4$$
$$\Leftrightarrow 2 + a_2 = a_2{}^2 + 2a_2 - 4$$
$$\Leftrightarrow a_2{}^2 + a_2 - 6 = 0$$
$$\Leftrightarrow (a_2 + 3)(a_2 - 2) = 0$$

であり，$a_2 \neq a_1 = 2$ であるから，$a_2 = c_1 = -3$ である。よって，$n \geqq 2$ のとき，

$$c_n = c_1 + \sum_{k=1}^{n-1}(c_{k+1} - c_k)$$
$$= -3 - (n-1)$$
$$= -n - 2 \ (n = 2, 3, \cdots)$$

となり，$n=1$ のとき，$c_1 = -3 = -1-2$ となるので，$n \geqq 1$ において $c_n = -n-2$ である。また，$b_{k+1} + c_k + 2k = 0$ にこれを代入すると，

$$b_{k+1} + (-k-2) + 2k = 0$$
$$\Leftrightarrow b_{k+1} = -k + 2$$

となる。$k+1$ を n で置き換えると，$n \geqq 2$ のとき，

$$b_n = -(n-1) + 2 = -n + 3$$

となり，これは $n=1$ のときも $b_1 = a_1 = 2$ より正しいので，$n \geqq 1$ において $b_n = -n+3$ である。

(答) $b_n = -n+3,\ c_n = -n-2$

(3)

$n = 1, 2, \cdots$ において，$c_n < 0$ であるから，$b_n = 0$ となるときを考える。このとき，

$$b_n = 0$$
$$\Leftrightarrow -n + 3 = 0$$
$$\Leftrightarrow n = 3$$

であるから，求める k は，

$$2k - 1 = 3 \Leftrightarrow k = 5$$

である。

(答) 5

4

(1)

$$Z=\frac{p-1}{3}\Leftrightarrow p=3Z+1$$

より,

$$X=\frac{p-4}{6}=\frac{3Z+1-4}{6}=\frac{1}{2}(Z-1),\ Y=\frac{1}{2}(3Z+1)$$

となる。したがって,

$$\begin{aligned}X^3+Y^3+Z^3&=\left\{\frac{1}{2}(Z-1)\right\}^3+\left\{\frac{1}{2}(3Z+1)\right\}^3+Z^3\\&=\frac{1}{8}(Z^3-3Z^2+3Z-1)+\frac{1}{8}(27Z^3+27Z^2+9Z+1)+Z^3\\&=\frac{9}{2}Z^3+3Z^2+\frac{3}{2}Z\end{aligned}$$

となる。

(答) $X=\frac{1}{2}(Z-1),\ Y=\frac{1}{2}(3Z+1),\ X^3+Y^3+Z^3=\frac{9}{2}Z^3+3Z^2+\frac{3}{2}Z$

(2)

与式の左辺を p の式で表すと,

$$\begin{aligned}\frac{9}{2}Z^3&=\frac{9}{2}\left(\frac{p-1}{3}\right)^3\\&=\frac{9}{2}\cdot\frac{p^3-3p^2+3p-1}{3^3}\\&=\frac{1}{6}p^3-\frac{1}{2}p^2+\frac{1}{2}p-\frac{1}{6}\end{aligned}$$

となる。与式の右辺を p の式で表すと,

$$\begin{aligned}Xp^2+aYp+bZ+c&=\frac{p-4}{6}p^2+a\cdot\frac{p^2}{2}+b\cdot\frac{p-1}{3}+c\\&=\frac{1}{6}p^3-\frac{2}{3}p^2+\frac{1}{2}ap^2+\frac{1}{3}bp-\frac{b}{3}+c\\&=\frac{1}{6}p^3+\left(\frac{1}{2}a-\frac{2}{3}\right)p^2+\frac{b}{3}p+c-\frac{b}{3}\end{aligned}$$

となる。両辺の係数を比較して,

$$\begin{cases}\frac{1}{2}a-\frac{2}{3}=-\frac{1}{2}\\\frac{b}{3}=\frac{1}{2}\\c-\frac{b}{3}=-\frac{1}{6}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a=\frac{1}{3}\\b=\frac{3}{2}\\c=\frac{1}{3}\end{cases}$$

を得る。

(答) $a=\frac{1}{3},\ b=\frac{3}{2},\ c=\frac{1}{3}$

(3)

$$\begin{aligned}X^3+Y^3+Z^3&=\frac{9}{2}Z^3+3Z^2+\frac{3}{2}Z\ (\because(1))\\&=Xp^2+\frac{1}{3}Yp+\frac{3}{2}Z+\frac{1}{3}+3Z^2+\frac{3}{2}Z\ (\because(2))\\&=Xp^2+Yp+Z+\left(-\frac{2}{3}Yp+3Z^2+2Z+\frac{1}{3}\right)\end{aligned}$$

となる。いま, $-\frac{2}{3}Yp+3Z^2+2Z+\frac{1}{3}$ について,

$$\begin{aligned}-\frac{2}{3}Yp+3Z^2+2Z+\frac{1}{3}&=-\frac{2}{3}p\cdot\frac{p}{2}+3\left(\frac{p-1}{3}\right)^2+2\cdot\frac{p-1}{3}+\frac{1}{3}\\&=-\frac{1}{3}p^2+\frac{p^2-2p+1}{3}+\frac{2(p-1)}{3}+\frac{1}{3}\\&=0\end{aligned}$$

である。ゆえに,

$$X^3+Y^3+Z^3=Xp^2+Yp+Z$$

を得る。

(証明終)

(4)

$p=100$ とおくと, $X=\frac{96}{6}=16,\ Y=\frac{100}{2}=50,\ Z=\frac{99}{3}=33$ より, (3)から,

$$16^3+50^3+33^3=16\cdot100^2+50\cdot100+33=165033$$

となる。

(答) 165033

$\boxed{5}$

(1)

$$\vec{e}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}}\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}$$
$$=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}$$
$$=\left(\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$$

となる。

(答) $\vec{e}=\left(\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$

(2)

Fは平面α上の点だから，$\vec{e},\overrightarrow{\mathrm{OB}}$の一次結合で表される。よって，実数$k,l$を用いて

$$\vec{f}=k\vec{e}+l\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$
$$=\frac{k}{3}\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}+l\begin{pmatrix}3\\-4\\5\end{pmatrix}$$
$$=\left(\frac{1}{3}k+3l,-\frac{2}{3}k-4l,\frac{2}{3}k+5l\right)$$

と書ける。また，$\vec{f}\perp\overrightarrow{\mathrm{OA}}$であるから，

$$\vec{f}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=0$$
$$\Leftrightarrow\left(\frac{1}{3}k+3l,-\frac{2}{3}k-4l,\frac{2}{3}k+5l\right)\cdot(1,-2,2)=0$$
$$\Leftrightarrow\left(\frac{1}{3}k+3l\right)-2\left(-\frac{2}{3}k-4l\right)+2\left(\frac{2}{3}k+5l\right)=0$$
$$\Leftrightarrow 3k+21l=0$$
$$\Leftrightarrow k=-7l$$

である。ゆえに，

$$\vec{f}=\left(\frac{1}{3}k+3l,-\frac{2}{3}k-4l,\frac{2}{3}k+5l\right)$$
$$=\left(\frac{2}{3}l,\frac{2}{3}l,\frac{1}{3}l\right)$$
$$=\frac{1}{3}l(2,2,1)$$

となる。$\vec{f}$は単位ベクトルであるから，

$$\left|\vec{f}\right|=1$$
$$\Leftrightarrow\frac{|l|}{3}\sqrt{2^2+2^2+1^2}=1$$
$$\Leftrightarrow|l|=1$$
$$\Leftrightarrow l=\pm1$$

を得る。ここで，$\vec{f}$と$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$のなす角$\theta$は$0<\theta<\frac{\pi}{2}$を満たすので，$0<\cos\theta<1$より$\vec{f}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}>0$である。$l=1$，すなわち$\vec{f}=\frac{1}{3}(2,2,1)$のとき，$\vec{f}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\frac{1}{3}(6-8+5)=1>0$であり，$l=-1$，すなわち$\vec{f}=-\frac{1}{3}(2,2,1)$のとき，$\vec{f}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=-1<0$となるから，求めるFの座標は，$\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$である。

(答) $\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$