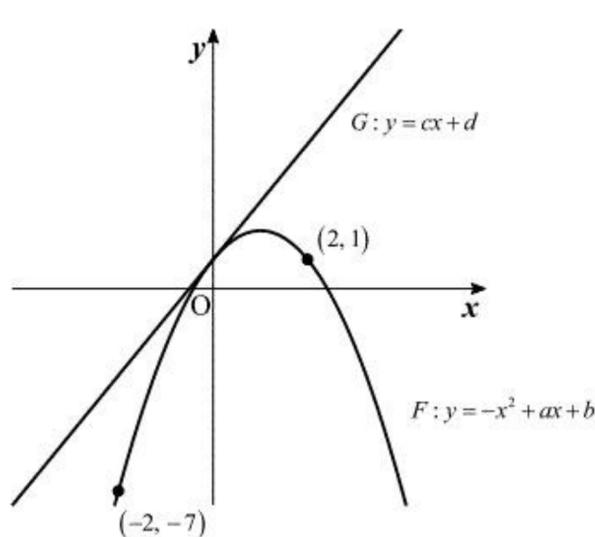


(1)



F は $(-2, -7)$, $(2, 1)$ を通るので、

$$\begin{cases} -7 = -4 - 2a + b \\ 1 = -4 + 2a + b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b - 2a = -3 \\ b + 2a = 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases}$$

となる。

(答) $a=2, b=1$

(2)

$F: y = -x^2 + 2x + 1$ と $G: y = cx + d$ を連立した式

$$\begin{aligned} -x^2 + 2x + 1 &= cx + d \\ \Leftrightarrow x^2 + (c-2)x + d - 1 &= 0 \end{aligned}$$

が重解を持つばよい。判別式を D とすると、

$$\begin{aligned} D &= (c-2)^2 - 4(d-1) \\ &= c^2 - 4c - 4d + 8 \end{aligned}$$

である。この方程式が重解を持つ条件は $D=0$ であるから、

$$\begin{aligned} c^2 - 4c - 4d + 8 &= 0 \\ \Leftrightarrow d &= \frac{1}{4}c^2 - c + 2 \end{aligned}$$

となる。

(答) $d = \frac{1}{4}c^2 - c + 2$

(3)

F の方程式より、

$$\begin{aligned} y &= -x^2 + 2x + 1 \\ &= -(x-1)^2 + 2 \end{aligned}$$

であるから、 F の頂点の座標は、 $(1, 2)$ である。 F を平行移動して頂点 $(0, 0)$ の $y = -x^2$ と重なるとき、 x 軸方向に -1 、 y 軸方向に -2 移動させている。いま、 G の方程式は、

$$y = cx + \frac{1}{4}c^2 - c + 2$$

であり、これを平行移動した式は、

$$y + 2 = c(x + 1) + \frac{1}{4}c^2 - c + 2$$

$$\Leftrightarrow y = cx + \frac{1}{4}c^2$$

である。これが G と重なるとき、 y 切片を比較して、

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}c^2 &= \frac{1}{4}c^2 - c + 2 \\ \Leftrightarrow c &= 2 \end{aligned}$$

を得る。したがって、(2)の結果より、

$$d = \frac{1}{4} \cdot 2^2 - 2 + 2 = 1$$

となる。

(答) $c=2, d=1$

(4)

$y = -x^2 + 2x + 1$ と $y = 2x + 1$ の交点は、

$$\begin{cases} y = -x^2 + 2x + 1 \\ y = 2x + 1 \end{cases}$$

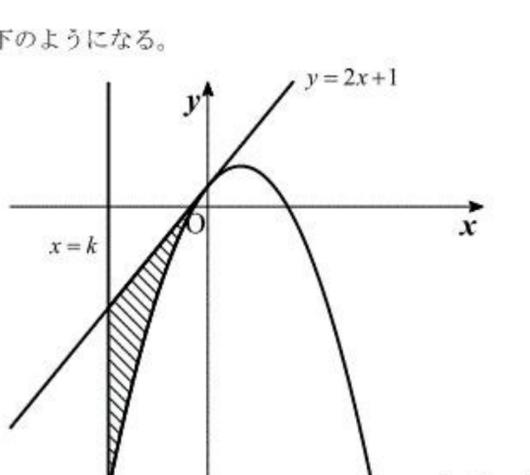
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 0 \\ y = 2x + 1 \end{cases}$$

$$\therefore (x, y) = (0, 1)$$

である。そこで、 k の符号によって場合分けをする。

[1] $k < 0$ のとき

図示すると以下ようになる。



斜線部の面積は、

$$\begin{aligned} \int_k^0 \{(2x+1) - (-x^2+2x+1)\} dx &= \int_k^0 x^2 dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 \right]_k^0 \\ &= -\frac{1}{3}k^3 \end{aligned}$$

となり、これが9に等しいので、

$$-\frac{1}{3}k^3 = 9$$

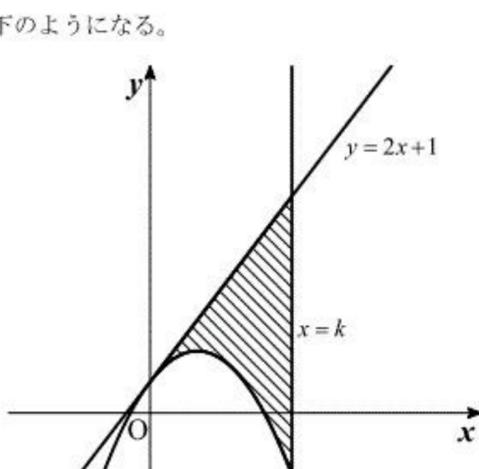
$$\Leftrightarrow k^3 = -27$$

$$\Leftrightarrow k = -3$$

である。これは $k < 0$ を満たす。

[2] $k > 0$ のとき

図示すると以下ようになる。



斜線部の面積は、

$$\begin{aligned} \int_0^k \{(2x+1) - (-x^2+2x+1)\} dx &= \int_0^k x^2 dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 \right]_0^k \\ &= \frac{1}{3}k^3 \end{aligned}$$

である。これが9に等しいので、

$$\frac{1}{3}k^3 = 9$$

$$\Leftrightarrow k^3 = 27$$

$$\Leftrightarrow k = 3$$

となる。これは $k > 0$ を満たす。

[3] $k = 0$ のとき

囲まれた面積は0となるので題意を満たさない。

以上[1], [2], [3]より、求める k は、 $k = \pm 3$ である。

(答) $k = \pm 3$

(1)

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8} \text{ より, } \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{8} = 3 \text{ となる。}$$

(答) 3

(2)

$$\begin{aligned} \log_x y + \log_y \frac{x^3}{y^4} &= \log_x y + \log_y x^3 - \log_y y^4 \\ &= \log_x y + 3 \log_y x - 4 \\ &= \log_x y + \frac{3}{\log_x y} - 4 \\ &= t + \frac{3}{t} - 4 \end{aligned}$$

となる。

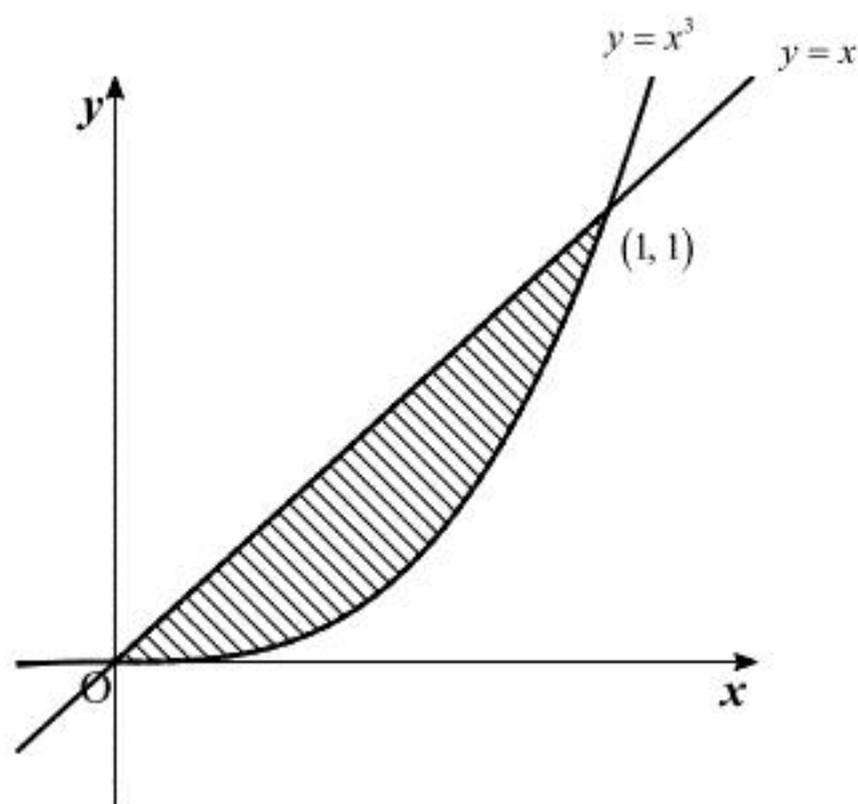
(答) $t + \frac{3}{t} - 4$

(3)

$$\begin{aligned} \log_x y + \log_y \frac{x^3}{y^4} &< 0 \\ \Leftrightarrow t + \frac{3}{t} - 4 &< 0 \quad (\because (2)) \\ \Leftrightarrow \frac{t^2 - 4t + 3}{t} &< 0 \\ \Leftrightarrow t^2 - 4t + 3 &< 0 \quad (\because t > 0) \\ \Leftrightarrow (t-1)(t-3) &< 0 \\ \Leftrightarrow 1 < t < 3 \end{aligned}$$

となる。 $t = \log_x y$ の底 x は $0 < x < 1$ をみたすので、

$$\begin{aligned} 1 < \log_x y < 3 \\ \Leftrightarrow x^3 < y < x \end{aligned}$$

となる。 $0 < x < 1, 0 < y < 1$ の範囲でこれを図示すると以下のようなになる。

(答) 上図, ただし境界は含まない

(1)

$S_1 = a_1$ であるから、 S_n の式に $n=1$ を代入すると、

$$\begin{aligned} S_1 &= a_1^2 + 1 \cdot a_1 - 4 \\ \Leftrightarrow a_1 &= a_1^2 + a_1 - 4 \\ \Leftrightarrow a_1^2 &= 4 \\ \Leftrightarrow a_1 &= \pm 2 \end{aligned}$$

である。そして $a_1 > 0$ より、

$$a_1 = 2$$

を得る。

(答) $a_1 = 2$

(2)

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= a_{n+1}^2 + (n+1)a_{n+1} - 4 \\ S_n &= a_n^2 + na_n - 4 \end{aligned}$$

の辺々を引いて、

$$\begin{aligned} S_{n+1} - S_n &= a_{n+1}^2 - a_n^2 + a_{n+1} + n(a_{n+1} - a_n) \\ \Leftrightarrow a_{n+1} &= a_{n+1}^2 - a_n^2 + a_{n+1} + n(a_{n+1} - a_n) \\ \Leftrightarrow a_{n+1}^2 - a_n^2 + n(a_{n+1} - a_n) &= 0 \\ \Leftrightarrow (a_{n+1} + a_n)(a_{n+1} - a_n) + n(a_{n+1} - a_n) &= 0 \\ \Leftrightarrow (a_{n+1} - a_n)(a_{n+1} + a_n + n) &= 0 \end{aligned}$$

を得る。 $a_{n+1} \neq a_n$ であるから、

$$a_{n+1} + a_n + n = 0$$

である。 $n=2k, 2k+1$ をそれぞれ代入すると、

$$\begin{aligned} \begin{cases} a_{2k+1} + a_{2k} + 2k = 0 \\ a_{2k+2} + a_{2k+1} + 2k+1 = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} b_{k+1} + c_k + 2k = 0 \\ c_{k+1} + b_{k+1} + 2k+1 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

となる。 b_{k+1} を消去すると、

$$c_{k+1} - c_k = -1$$

となる。これは、数列 $\{c_n\}$ が等差数列であり、その公差が -1 であることを表す。 $\{c_n\}$ の初項を考えると、

$$\begin{aligned} S_2 &= a_2^2 + 2a_2 - 4 \\ \Leftrightarrow a_1 + a_2 &= a_2^2 + 2a_2 - 4 \\ \Leftrightarrow 2 + a_2 &= a_2^2 + 2a_2 - 4 \\ \Leftrightarrow a_2^2 + a_2 - 6 &= 0 \\ \Leftrightarrow (a_2 + 3)(a_2 - 2) &= 0 \end{aligned}$$

であり、 $a_2 \neq a_1 = 2$ であるから、 $a_2 = c_1 = -3$ である。よって、 $n \geq 2$ のとき、

$$\begin{aligned} c_n &= c_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (c_{k+1} - c_k) \\ &= -3 - (n-1) \\ &= -n - 2 \quad (n=2, 3, \dots) \end{aligned}$$

となり、 $n=1$ のとき、 $c_1 = -3 = -1 - 2$ となるので、 $n \geq 1$ において $c_n = -n - 2$ である。また、 $b_{k+1} + c_k + 2k = 0$ にこれを代入すると、

$$\begin{aligned} b_{k+1} + (-k - 2) + 2k &= 0 \\ \Leftrightarrow b_{k+1} &= -k + 2 \end{aligned}$$

となる。 $k+1$ を n で置き換えると、

$$b_n = -(n-1) + 2 = -n + 3$$

となる。

(答) $b_n = -n + 3, c_n = -n - 2$

(3)

$n=1, 2, \dots$ において、 $c_n < 0$ であるから、 $b_n = 0$ となるときを考える。このとき、

$$\begin{aligned} b_n &= 0 \\ \Leftrightarrow -n + 3 &= 0 \\ \Leftrightarrow n &= 3 \end{aligned}$$

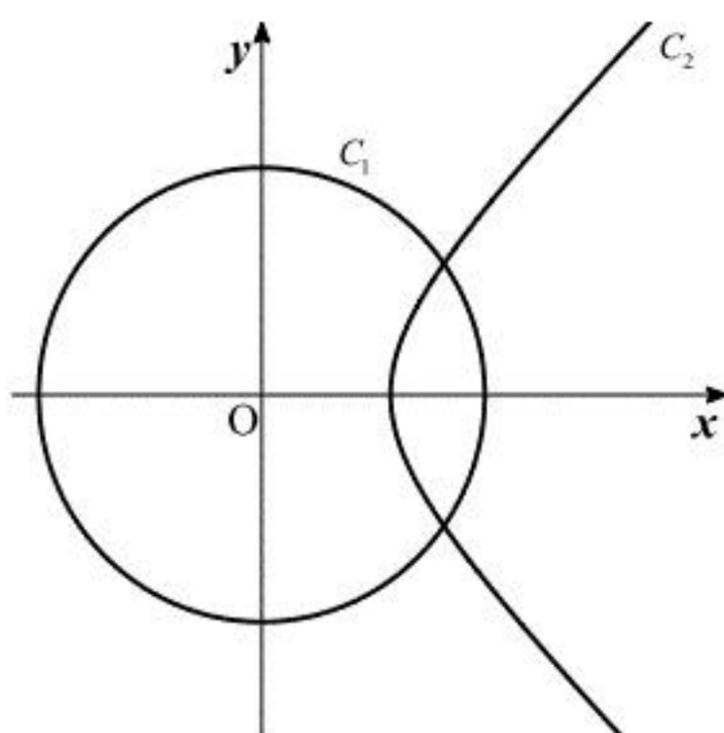
であるから、求める k は、

$$2k - 1 = 3 \Leftrightarrow k = 5$$

である。

(答) 5

(1)



C_2 の式について、 $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ の範囲で $0 < \cos \theta \leq 1$ である。よって、

$$1 \leq \frac{1}{\cos \theta} = x$$

である。 $1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$ を利用すると、 C_2 の式は、

$$x^2 - y^2 = 1 (x \geq 1)$$

となる。これと C_1 の方程式 $x^2 + y^2 = 3$ を連立し、 y を消去すると、

$$2x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

となり、 $x \geq 1$ なので、 $x = \sqrt{2}$ を得る。ここで、交点は第1象限にあることから $y > 0$ を考慮して C_2 の式から y を求めると、

$$\begin{aligned} 2 - y^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow y^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow y &= 1 \end{aligned}$$

となる。よって、求める交点は $(\sqrt{2}, 1)$ である。

(答) $(\sqrt{2}, 1)$

(2)

C_2 は双曲線の一部なので、双曲線の接線の公式を用いると、接線の方程式は

$$\sqrt{2}x - y = 1 \Leftrightarrow y = \sqrt{2}x - 1$$

となる。

(答) $y = \sqrt{2}x - 1$

(3)

C_1, C_2 を y の関数 x_1, x_2 とみると、

$$x_1^2 = 3 - y^2, x_2^2 = 1 + y^2$$

となる。求める体積は、立体の x 軸に関する対称性を考慮して、

$$\begin{aligned} 2 \cdot \pi \int_0^1 (x_1^2 - x_2^2) dy &= 2\pi \int_0^1 \{(3 - y^2) - (1 + y^2)\} dy \\ &= 2\pi \int_0^1 (2 - 2y^2) dy \\ &= 4\pi \int_0^1 (1 - y^2) dy \\ &= 4\pi \left[y - \frac{y^3}{3} \right]_0^1 \\ &= 4\pi \left(1 - \frac{1}{3} \right) \\ &= \frac{8}{3}\pi \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{8}{3}\pi$

(1)

$$\begin{aligned}\vec{e} &= \frac{\overline{\text{OA}}}{|\overline{\text{OA}}|} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right)\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \vec{e} = \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right)$$

(2)

Fは平面 α 上の点だから、 $\vec{e}, \overline{\text{OB}}$ の一次結合で表される。よって、実数 k, l を用いて

$$\begin{aligned}\vec{f} &= k\vec{e} + l\overline{\text{OB}} \\ &= \frac{k}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + l \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} \\ &= \left(\frac{1}{3}k + 3l, -\frac{2}{3}k - 4l, \frac{2}{3}k + 5l \right)\end{aligned}$$

と書ける。また、 $\vec{f} \perp \overline{\text{OA}}$ であるから、

$$\begin{aligned}\vec{f} \cdot \overline{\text{OA}} &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}k + 3l, -\frac{2}{3}k - 4l, \frac{2}{3}k + 5l \right) \cdot (1, -2, 2) &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}k + 3l \right) - 2 \left(-\frac{2}{3}k - 4l \right) + 2 \left(\frac{2}{3}k + 5l \right) &= 0 \\ \Leftrightarrow 3k + 2l &= 0 \\ \Leftrightarrow k &= -7l\end{aligned}$$

である。ゆえに、

$$\begin{aligned}\vec{f} &= \left(\frac{1}{3}k + 3l, -\frac{2}{3}k - 4l, \frac{2}{3}k + 5l \right) \\ &= \left(\frac{2}{3}l, \frac{2}{3}l, \frac{1}{3}l \right) \\ &= \frac{1}{3}l(2, 2, 1)\end{aligned}$$

となる。 \vec{f} は単位ベクトルであるから、

$$\begin{aligned}|\vec{f}| &= 1 \\ \Leftrightarrow \frac{|l|}{3} \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} &= 1 \\ \Leftrightarrow |l| &= 1 \\ \Leftrightarrow l &= \pm 1\end{aligned}$$

を得る。ここで、 \vec{f} と $\overline{\text{OB}}$ のなす角 θ は $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ を満たすので、 $0 < \cos \theta < 1$ より $\vec{f} \cdot \overline{\text{OB}} > 0$ である。 $l=1$ 、すなわち $\vec{f} = \frac{1}{3}(2, 2, 1)$ のとき、 $\vec{f} \cdot \overline{\text{OB}} = \frac{1}{3}(6 - 8 + 5) = 1 > 0$ であり、 $l=-1$ 、すなわち $\vec{f} = -\frac{1}{3}(2, 2, 1)$ のとき、 $\vec{f} \cdot \overline{\text{OB}} = -1 < 0$ となるから、求めるFの座標は、 $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right)$ である。

$$(\text{答}) \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right)$$

(3)

$$|\vec{p}| = 2, \vec{p} \cdot \vec{e} = \frac{1}{3}(0 + 0 + 4) = \frac{4}{3}, \vec{p} \cdot \vec{f} = \frac{1}{3}(0 + 0 + 2) = \frac{2}{3}, |\vec{e}| = |\vec{f}| = 1, \vec{e} \cdot \vec{f} = 0$$

であるから、

$$\begin{aligned}|\vec{p} - (s\vec{e} + t\vec{f})|^2 &= |\vec{p}|^2 - 2\vec{p} \cdot (s\vec{e} + t\vec{f}) + |s\vec{e} + t\vec{f}|^2 \\ &= |\vec{p}|^2 - 2(s\vec{p} \cdot \vec{e} + t\vec{p} \cdot \vec{f}) + s^2|\vec{e}|^2 + 2st\vec{e} \cdot \vec{f} + t^2|\vec{f}|^2 \\ &= 4 - 2 \left(s \cdot \frac{4}{3} + t \cdot \frac{2}{3} \right) + s^2 + 0 + t^2 \\ &= s^2 - \frac{8}{3}s + t^2 - \frac{4}{3}t + 4 \\ &= \left(s - \frac{4}{3} \right)^2 + \left(t - \frac{2}{3} \right)^2 + \frac{16}{9}\end{aligned}$$

と変形できる。よって、 $|\vec{p} - (s\vec{e} + t\vec{f})|$ は $s = \frac{4}{3}, t = \frac{2}{3}$ のとき最小値 $\sqrt{\frac{16}{9}} = \frac{4}{3}$ をとる。

$$(\text{答}) \frac{4}{3}$$