

1

(1)

与えられた漸化式

$$(n+2)a_n - 2(n+1)a_{n+1} + (n+1)a_na_{n+1} = 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

について、 $n=1, a_1=\frac{1}{3}$ を代入すると、 a_2 は

$$\begin{aligned} 3 \cdot \frac{1}{3} - 2 \cdot 2 \cdot a_2 + 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot a_2 &= 0 \\ \Leftrightarrow a_2 &= \frac{3}{10} \end{aligned}$$

と求まる。

(答) $\frac{3}{10}$

(2)

すべての自然数 n について $a_n \neq 0$ が成り立つことを数学的帰納法を用いて示す。

[1] $n=1$ のとき $a_n \neq 0$ を示す

初項は $a_1=\frac{1}{3}$ であるから、 $a_1 \neq 0$ を満たす。

[2] $n=k$ のとき $a_k \neq 0$ を仮定し、 $n=k+1$ のとき $a_{k+1} \neq 0$ の成立を示す

①について、 $n=k$ を代入して整理すると

$$a_{k+1} = 0 \Rightarrow a_k = 0$$

が成立することがわかる。この命題について、対偶をとると

$$a_k \neq 0 \Rightarrow a_{k+1} \neq 0$$

であることがわかるから、 $a_k \neq 0$ を仮定したとき $a_{k+1} \neq 0$ が成立する。

以上[1], [2]より、数学的帰納法によって、すべての自然数 n について $a_n \neq 0$ が成り立つことが示された。

(証明終)

(3)

(2)の結果より、すべての自然数 n について $a_na_{n+1} \neq 0$ が成り立つから、①の両辺について a_na_{n+1} で割ることで

$$\frac{n+2}{a_{n+1}} - 2\frac{n+1}{a_n} + (n+1) = 0 \quad \dots \textcircled{2}$$

が得られる。ここで数列 $\{b_n\}$ を $b_n = \frac{n+1}{a_n}$ とおくことで定めると、②は

$$\begin{aligned} b_{n+1} - 2b_n + n + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow b_{n+1} - (n+3) &= 2\{b_n - (n+2)\} \quad \dots \textcircled{3} \end{aligned}$$

と変形できる。さらに数列 $\{c_n\}$ を $c_n = b_n - (n+2)$ とおくことで定めると、③より数列 $\{c_n\}$ は公比2の等比数列となることがわかる。初項 c_1 については

$$\begin{aligned} c_1 &= b_1 - 3 \\ &= \frac{2}{a_1} - 3 \\ &= 3 \end{aligned}$$

であるから、一般項は $c_n = 3 \cdot 2^{n-1}$ となることがわかり、数列 $\{b_n\}$ の一般項は

$$b_n = 3 \cdot 2^{n-1} + n + 2$$

と求まる。したがって、数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n = \frac{n+1}{3 \cdot 2^{n-1} + n + 2}$$

であることがわかる。

(答) $a_n = \frac{n+1}{3 \cdot 2^{n-1} + n + 2}$

(4)

(3)の結果より $a_n = \frac{n+1}{3 \cdot 2^{n-1} + n + 2}$ であることから、すべての自然数 n について

$$\frac{n+1}{3 \cdot 2^{n-1} + n + 2} < \frac{n+1}{3 \cdot 2^{n-1}} \Leftrightarrow a_n < \frac{n+1}{3 \cdot 2^{n-1}}$$

が成り立つ。ここで、 $T_n = \sum_{k=1}^n \frac{k+1}{3 \cdot 2^{k-1}}$ と定めると

$$\sum_{k=1}^n a_k < \sum_{k=1}^n \frac{k+1}{3 \cdot 2^{k-1}} \Leftrightarrow S_n < T_n \quad \dots \textcircled{4}$$

となる。 T_n について、その値を求めると

$$\begin{aligned} T_n &= \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 + \frac{3}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \dots + \frac{n+1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ \rightarrow) \frac{1}{2}T_n &= \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 + \frac{3}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \dots + \frac{n}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \frac{n+1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n \right) \\ \frac{1}{2}T_n &= \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \dots + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \frac{n+1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2}T_n &= \frac{2}{3} + \frac{\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 - \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{n+1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ \therefore T_n &= 2 - \frac{n+3}{3 \cdot 2^{n-1}} \end{aligned}$$

となるから、すべての自然数 n について不等式

$$T_n < 2 \quad \dots \textcircled{5}$$

が成立し、④、⑤より

$$S_n < 2$$

を満たすことが示された。

(証明終)

2

(1)

関数 $f(x)$ は、整数でない実数 x に対して $f(x) = \frac{1}{x - [x]}$ と定められている。 $\sqrt{2}$ は $1 < \sqrt{2} < 2$ を

満たすから、 $[\sqrt{2}] = 1$ であるため、 $f(\sqrt{2})$ の値は

$$\begin{aligned} f(\sqrt{2}) &= \frac{1}{\sqrt{2} - 1} \\ &= \frac{\sqrt{2} + 1}{(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1)} \\ &= \sqrt{2} + 1 \end{aligned}$$

と求まる。また、 $2 < \sqrt{2} + 1 < 3$ より $[\sqrt{2} + 1] = 2$ となるため、 $f(f(\sqrt{2}))$ の値は

$$\begin{aligned} f(f(\sqrt{2})) &= \frac{1}{(\sqrt{2} + 1) - 2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2} - 1} \\ &= \sqrt{2} + 1 \end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad f(\sqrt{2}) = f(f(\sqrt{2})) = \sqrt{2} + 1$$

(2)

$\sqrt{3}$ は $1 < \sqrt{3} < 2$ を満たすから、 $[\sqrt{3}] = 1$ であるため、 $f(\sqrt{3})$ の値は

$$\begin{aligned} f(\sqrt{3}) &= \frac{1}{\sqrt{3} - 1} \\ &= \frac{\sqrt{3} + 1}{(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1)} \\ &= \frac{\sqrt{3} + 1}{2} \end{aligned}$$

と求まる。また、 $1 < \frac{\sqrt{3} + 1}{2} < \frac{3}{2}$ より $[\frac{\sqrt{3} + 1}{2}] = 1$ となるため、 $f(f(\sqrt{3}))$ の値は

$$\begin{aligned} f(f(\sqrt{3})) &= \frac{1}{\frac{\sqrt{3} + 1}{2} - 1} \\ &= \frac{2}{\sqrt{3} - 1} \\ &= \sqrt{3} + 1 \end{aligned}$$

と求まる。さらに、 $2 < \sqrt{3} + 1 < 3$ より $[\sqrt{3} + 1] = 2$ となるため、 $f(f(f(\sqrt{3})))$ の値は

$$\begin{aligned} f(f(f(\sqrt{3}))) &= \frac{1}{(\sqrt{3} + 1) - 2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{3} - 1} \\ &= \frac{\sqrt{3} + 1}{2} \end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad f(\sqrt{3}) = f(f(f(\sqrt{3}))) = \frac{\sqrt{3} + 1}{2}, f(f(\sqrt{3})) = \sqrt{3} + 1$$

(3)

$n < x < n + 1$ を満たすとき、 $[x] = n$ であるから、条件 $f(x) = x$ は

$$\begin{aligned} f(x) = x &\Leftrightarrow \frac{1}{x - n} = x \\ &\Leftrightarrow x^2 - nx - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{n \pm \sqrt{n^2 + 4}}{2} \end{aligned}$$

と変形できる。ここで、すべての自然数 n について、不等式

$$n^2 < n^2 + 4 < n^2 + 4n + 4 \Leftrightarrow n < \sqrt{n^2 + 4} < n + 2$$

が成立するから、方程式 $f(x) = x$ の解について

$$\frac{n - \sqrt{n^2 + 4}}{2} < 0 < n < \frac{n + \sqrt{n^2 + 4}}{2} < n + 1$$

となる。したがって、求める x は $x = \frac{n + \sqrt{n^2 + 4}}{2}$ であることがわかる。

$$(\text{答}) \quad x = \frac{n + \sqrt{n^2 + 4}}{2}$$

(4)

$n < x < n + 1$ かつ $f(x)$ は整数でなく、 $f(f(x)) = x$ を満たすものをすべて求めることを考え

る。 $f(x) = \frac{1}{x - [x]}$ について、 $[x]$ の定め方から $0 < x - [x] < 1$ であるため

$$f(x) > 1$$

を満たす。さらに $f(x)$ は整数でないとき、自然数 m で

$$m < f(x) < m + 1$$

を満たすものが存在することがわかる。このとき、条件 $f(f(x)) = x$ は

$$\begin{aligned} f(f(x)) = x &\Leftrightarrow \frac{1}{f(x) - m} = x \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{\frac{1}{x - n} - m} = x \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{1 - m(x - n)} = x \\ &\Leftrightarrow mx^2 - mnx - n = 0 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{n \pm \sqrt{n^2 + \frac{4n}{m}}}{2} \end{aligned}$$

と変形できる。ここで、すべての自然数 m, n について、不等式

$$n^2 < n^2 + \frac{4n}{m} < n^2 + 4n + 4 \Leftrightarrow n < \sqrt{n^2 + \frac{4n}{m}} < n + 2$$

が成立するから、方程式 $f(f(x)) = x$ の解について

$$\frac{n - \sqrt{n^2 + \frac{4n}{m}}}{2} < 0 < n < \frac{n + \sqrt{n^2 + \frac{4n}{m}}}{2} < n + 1$$

となる。よって、以下 $x = \frac{n + \sqrt{n^2 + \frac{4n}{m}}}{2}$ についてのみ考えればよく、 $f(x)$ を計算すると

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\frac{n + \sqrt{n^2 + \frac{4n}{m}}}{2} - n} \\ &= \frac{2\left(\sqrt{n^2 + \frac{4n}{m}} + n\right)}{\left(\sqrt{n^2 + \frac{4n}{m}} - n\right)\left(\sqrt{n^2 + \frac{4n}{m}} + n\right)} \\ &= \frac{m + \sqrt{m^2 + \frac{4m}{n}}}{2} \end{aligned}$$

となり、同様にして、不等式

$$m < \frac{m + \sqrt{m^2 + \frac{4m}{n}}}{2} < m + 1$$

を満たす。 m は自然数であったから、 $f(x)$ は整数でないことも満たすことがわかる。したが

って、すべての自然数 m について $x = \frac{n + \sqrt{n^2 + \frac{4n}{m}}}{2}$ は十分条件を満たすことがわかったから、

これが求める解である。ここで(3)の結果より、 $f(x) = x$ を満たす x は $m = n$ の場合の解であり、

さらに、 $\frac{n + \sqrt{n^2 + \frac{4n}{m}}}{2}$ は m について単調減少であるから、 $x = \frac{n + \sqrt{n^2 + 4}}{2}$ は n 番目に大きな値

であることがわかる。

(答) n 番目

3

(1)

直線 l, m の方程式は、それぞれ

$$\text{直線 } l : y = \frac{\sin t}{\cos t + 1}(x + 1)$$

$$\text{直線 } m : y = (\sin t)x$$

となる。これらの式を連立させて解くことによって、交点 R の座標は

$$\begin{aligned} \begin{cases} y = \frac{\sin t}{\cos t + 1}(x + 1) \\ y = (\sin t)x \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\sin t}{\cos t + 1}(x + 1) = (\sin t)x \\ y = (\sin t)x \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} (\cos t)x = 1 \\ y = (\sin t)x \end{cases} (\because \sin t, \cos t > 0) \\ &\Leftrightarrow (x, y) = \left(\frac{1}{\cos t}, \tan t \right) \end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \left(\frac{1}{\cos t}, \tan t \right)$$

(2)

点 $(x, y) (x > 0, y > 0)$ が曲線 C 上にあるための条件は

$$\begin{aligned} (x, y) \in C &\Leftrightarrow (x, y) = \left(\frac{1}{\cos t}, \tan t \right) \text{ を満たす実数 } t \text{ が } 0 < t < \frac{\pi}{2} \text{ の範囲に存在する} \\ &\Leftrightarrow x^2 - y^2 = 1, x > 1, y > 0 \end{aligned}$$

と求まる。ここで、 $x > 0, y > 0$ のとき関係式 $x^2 - y^2 = 1$ を満たせば必ず $x > 1$ となることから、求める条件は

$$x^2 - y^2 = 1$$

であることがわかる。

$$(\text{答}) x^2 - y^2 = 1 (x > 0, y > 0)$$

(3)

(a)

直線 l, m, n が x 軸の正の向きとなす角をそれぞれ α, β, γ とおく。(1)の結果より、直線 n の傾きは

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{1}{\cos^2 t}}{\frac{\sin t}{\cos^2 t}} = \frac{1}{\sin t}$$

と計算できるから、 $\tan \alpha, \tan \beta, \tan \gamma$ の値は

$$\tan \alpha = \frac{\sin t}{\cos t + 1}, \tan \beta = \sin t, \tan \gamma = \frac{1}{\sin t}$$

であることがわかる。ここで、直線 l, m がなす鋭角を θ_1 、直線 m, n がなす鋭角を θ_2 とすると

$$\begin{aligned} \tan \theta_1 &= |\tan(\beta - \alpha)| = \left| \frac{\tan \beta - \tan \alpha}{1 + \tan \beta \tan \alpha} \right| = \left| \frac{\sin t - \frac{\sin t}{\cos t + 1}}{1 + \sin t \cdot \frac{\sin t}{\cos t + 1}} \right| = \frac{\sin t \cos t}{\sin^2 t + \cos t + 1} \\ \tan \theta_2 &= |\tan(\gamma - \beta)| = \left| \frac{\tan \gamma - \tan \beta}{1 + \tan \gamma \tan \beta} \right| = \left| \frac{\frac{1}{\sin t} - \sin t}{1 + \frac{1}{\sin t} \cdot \sin t} \right| = \frac{\cos^2 t}{2 \sin t} \end{aligned}$$

となるから、 $\theta_1 = \theta_2$ であるとき

$$\begin{aligned} \tan \theta_1 &= \tan \theta_2 \Leftrightarrow \frac{\sin t \cos t}{\sin^2 t + \cos t + 1} = \frac{\cos^2 t}{2 \sin t} \\ &\Leftrightarrow 2 \sin^2 t \cos t = (\sin^2 t + \cos t + 1) \cos^2 t \\ &\Leftrightarrow \cos^3 t - 3 \cos^2 t - 2 \cos t + 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (\cos t + 1)(\cos^2 t - 4 \cos t + 2) = 0 \\ &\Leftrightarrow \cos t = 2 - \sqrt{2} \quad (\because 0 < \cos t < 1) \end{aligned}$$

となる。このとき、

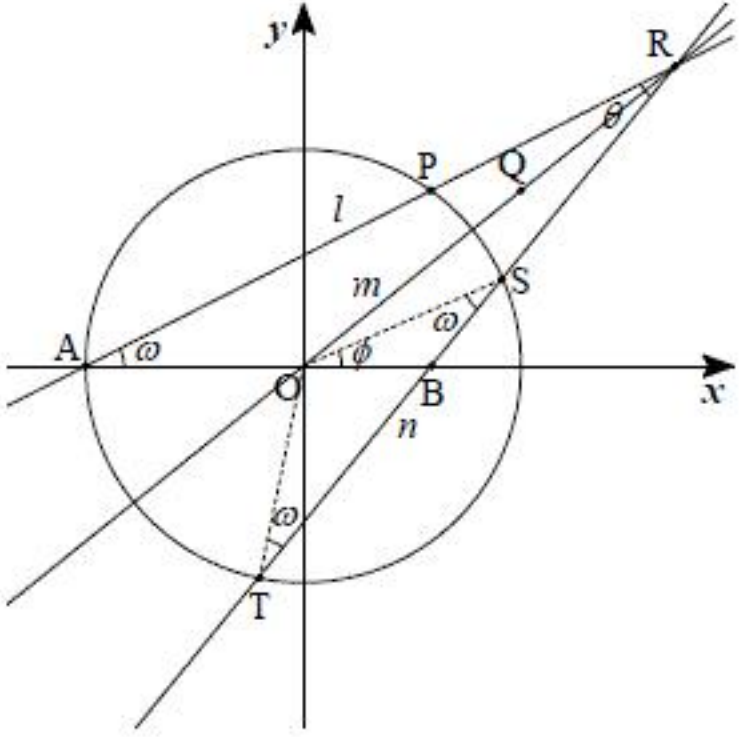
$$\begin{aligned} \sin t &= \sqrt{1 - \cos^2 t} \quad (\because 0 < \sin t < 1) \\ &= \sqrt{1 - (2 - \sqrt{2})^2} \\ &= \sqrt{4\sqrt{2} - 5} \end{aligned}$$

となるから、点 $P(\cos t, \sin t)$ の座標は $(2 - \sqrt{2}, \sqrt{4\sqrt{2} - 5})$ と求まる。

$$(\text{答}) (2 - \sqrt{2}, \sqrt{4\sqrt{2} - 5})$$

(b)

まず(a)の結果より、 $\tan \alpha \neq \tan \gamma$ であることから直線 l と直線 n は一致しないことがわかる。よって、 $\theta_1 = \theta_2$ を満たすとき、各点と各直線の位置関係は以下の図のようになる。ここで、直線 n と円の2交点のうち、 y 座標が負の点を T とおくと、直線 l と n 、点 P, A と点 S, T 、円は直線 m に関してそれぞれ対称であることに注意する。



上図のように直線 n と x 軸の交点を点 B とし、 $\angle RAB = \omega$ とおくと、 $\triangle ABR$ について

$$\angle ABR = 180^\circ - (\theta + \omega) \quad \dots \textcircled{1}$$

である。ここで、直線 m に関する対称性より

$$\angle OTS = \angle RAB = \omega$$

であり、 $\triangle OTS$ は二等辺三角形であることから

$$\angle TSO = \angle OTS = \omega$$

となる。したがって、 $\triangle OBS$ について

$$\angle OBS = 180^\circ - (\phi + \omega) \quad \dots \textcircled{2}$$

となることから、 $\textcircled{1}$ 、 $\textcircled{2}$ より

$$\begin{aligned} \angle ABR &= \angle OBS \\ \Leftrightarrow 180^\circ - (\theta + \omega) &= 180^\circ - (\phi + \omega) \\ \Leftrightarrow \theta &= \phi \end{aligned}$$

であることがわかる。

(証明終)

数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ を

$$a_n = \left(\frac{(3n+1)(3n+2)(3n+3)\cdots(3n+n)}{(n+1)(n+2)(n+3)\cdots(n+n)} \right)^{\frac{1}{n}}$$

$$b_n = \left(\frac{(3n^2+1^2)(3n^2+2^2)(3n^2+3^2)\cdots(3n^2+n^2)}{(n^2+1^2)(n^2+2^2)(n^2+3^2)\cdots(n^2+n^2)} \right)^{\frac{1}{n}}$$

と定める。このとき、それぞれ自然対数をとることで

$$\log a_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \log \left(\frac{3n+k}{n+k} \right) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \log \left(\frac{3+\frac{k}{n}}{1+\frac{k}{n}} \right)$$

$$\log b_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \log \left(\frac{3n^2+k^2}{n^2+k^2} \right) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \log \left(\frac{3+\left(\frac{k}{n}\right)^2}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2} \right)$$

となるから、区積分積法を用いることで

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \log a_n = \int_0^1 \log \left(\frac{3+x}{1+x} \right) dx \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \log b_n = \int_0^1 \log \left(\frac{3+x^2}{1+x^2} \right) dx \quad \cdots \textcircled{2}$$

となることがわかる。ここで、①、②の被積分関数について、 $0 < x < 1$ において

$$\begin{aligned} \frac{3+x}{1+x} - \frac{3+x^2}{1+x^2} &= \frac{(3+x)(1+x^2) - (3+x^2)(1+x)}{(1+x)(1+x^2)} \\ &= \frac{(3+x)(1+x^2) - (3+x^2)(1+x)}{(1+x)(1+x^2)} \\ &= \frac{-2x(1-x)}{(1+x)(1+x^2)} \\ &< 0 \end{aligned}$$

であり、対数関数は単調増加関数であることから、この範囲で

$$\log \left(\frac{3+x}{1+x} \right) < \log \left(\frac{3+x^2}{1+x^2} \right)$$

となることがわかる。よって、定積分の値について

$$\int_0^1 \log \left(\frac{3+x}{1+x} \right) dx < \int_0^1 \log \left(\frac{3+x^2}{1+x^2} \right) dx \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \log a_n < \lim_{n \rightarrow \infty} \log b_n$$

となるから、指数関数は連続な単調増加関数であることと合わせて

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{\log a_n} < \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\log b_n} \Leftrightarrow \alpha < \beta$$

を満たすことが示された。

(証明終)

また、①の定積分の値を計算すると

$$\begin{aligned} \int_0^1 \log \left(\frac{3+x}{1+x} \right) dx &= \int_0^1 \{ \log(3+x) - \log(1+x) \} dx \\ &= \left[\{ (3+x) \log(3+x) - x \} - \{ (1+x) \log(1+x) - x \} \right]_0^1 \\ &= (4 \log 4 - 2 \log 2) - (3 \log 3 - 1 \log 1) \\ &= \log \left(\frac{64}{27} \right) \end{aligned}$$

となるから、 α の値は

$$\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\log a_n} = \frac{64}{27}$$

と求まる。②の定積分については、部分積分法より

$$\begin{aligned} \int_0^1 \log \left(\frac{3+x^2}{1+x^2} \right) dx &= \int_0^1 \{ \log(3+x^2) - \log(1+x^2) \} dx \\ &= \left[x \{ \log(3+x^2) - \log(1+x^2) \} \right]_0^1 - \int_0^1 \left(\frac{2x^2}{3+x^2} - \frac{2x^2}{1+x^2} \right) dx \\ &= \log 2 - \int_0^1 \left\{ \frac{2(3+x^2)-6}{3+x^2} - \frac{2(1+x^2)-2}{1+x^2} \right\} dx \\ &= \log 2 + 6 \int_0^1 \frac{1}{3+x^2} dx - 2 \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx \end{aligned}$$

と変形できるが、ここで、定積分 $\int_0^1 \frac{1}{3+x^2} dx$, $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$ の値について、それぞれ $x = \sqrt{3} \tan \theta$,

$x = \tan \varphi$ と置換することで

$$\begin{array}{c|cc} x & 0 & \rightarrow & 1 \\ \hline \theta & 0 & \rightarrow & \frac{\pi}{6} \\ \hline \frac{dx}{d\theta} & \frac{\sqrt{3}}{\cos^2 \theta} & & \end{array}$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{3+x^2} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{3+3 \tan^2 \theta} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\cos^2 \theta} d\theta \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} [\theta]_0^{\frac{\pi}{6}} \\ &= \frac{\pi}{6\sqrt{3}} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{c|cc} x & 0 & \rightarrow & 1 \\ \hline \varphi & 0 & \rightarrow & \frac{\pi}{4} \\ \hline \frac{dx}{d\varphi} & \frac{1}{\cos^2 \varphi} & & \end{array}$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\tan^2 \varphi} \cdot \frac{1}{\cos^2 \varphi} d\varphi \\ &= [\varphi]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

であることがわかるから、②の定積分の値は

$$\begin{aligned} \int_0^1 \log \left(\frac{3+x^2}{1+x^2} \right) dx &= \log 2 + 6 \cdot \frac{\pi}{6\sqrt{3}} - 2 \cdot \frac{\pi}{4} \\ &= \log 2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2} \right) \pi \end{aligned}$$

となる。したがって、 β の値は

$$\beta = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\log b_n} = 2e^{\left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2}\right)\pi}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad \alpha = \frac{64}{27}, \beta = 2e^{\left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2}\right)\pi}$$