

平成 27 年 度

数 学

注意事項

1. 問題は 4 題で、すべて必答問題です。
2. 解答はすべて別紙(解答用紙 4 枚)の該当する欄に記入しなさい。
3. 解答用紙の裏面を使用する場合は、表面の右下に「裏面に続く」と記入し、表面の下の部分を持って上にめくり記入しなさい。表面とは書く方向が反対になります。
4. 図やグラフは解答の中で重要な位置をしめます。その特徴をおさえて、ていねいに描きなさい。
5. 解答者がたどる道筋や問題解決に至る要点を明確に意識して、論述式的答案を読みやすく書きなさい。
6. 問題用紙の余白は、下書きやミスがないかどうか見直すのに十分活用しなさい。

1

(必答問題) (配点 50)

数列 $\{a_n\}$ は初項 $a_1 = \frac{1}{3}$ および漸化式

$$(n+2)a_n - 2(n+1)a_{n+1} + (n+1)a_na_{n+1} = 0$$

($n = 1, 2, 3, \dots$) を満たす. 以下の問いに答えよ.

- (1) a_2 を求めよ.
- (2) すべての自然数 n について $a_n \neq 0$ が成り立つことを証明せよ.
- (3) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ.
- (4) $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ とする. このとき, すべての自然数 n について $S_n < 2$ が成り立つことを証明せよ.

2

(必答問題) (配点 50)

整数ではない実数 x に対して $f(x) = \frac{1}{x - [x]}$ と定める.

ただし, $[x]$ は $l < x < l + 1$ を満たす整数 l を表す. 以下の問いに答えよ.

- (1) $f(\sqrt{2})$, $f(f(\sqrt{2}))$ を計算し, 簡潔な形で答えよ.
- (2) $f(\sqrt{3})$, $f(f(\sqrt{3}))$, $f(f(f(\sqrt{3})))$ を計算し, 簡潔な形で答えよ.
- (3) 自然数 n に対して, $n < x < n + 1$ かつ $f(x) = x$ を満たす x を求めよ.
- (4) 自然数 n を 1 つ固定する. $n < x < n + 1$ の範囲の x で, $f(x)$ が整数ではなく, さらに $f(f(x)) = x$ を満たす x を大きい順に並べる. その中の x で $f(x) = x$ を満たすものは何番目に現れるかを答えよ.

3

(必答問題) (配点 50)

t は実数で $0 < t < \frac{\pi}{2}$ を満たすとする. 平面上に点 $O(0, 0)$, $A(-1, 0)$, $P(\cos t, \sin t)$, $Q(1, \sin t)$ をとる. このとき以下の問いに答えよ.

(1) 点 A と点 P を通る直線を l , 点 O と点 Q を通る直線を m とする. このとき l , m の交点 R の座標を求めよ.

(2) t が $0 < t < \frac{\pi}{2}$ の範囲全体を動くときに点 R が描く曲線を C とする. このとき, 点 (x, y) ($x > 0, y > 0$) が C 上にあるための条件を x, y の式で表せ.

(3) 曲線 C の点 R における接線を n とする. ある t に対して直線 l, m がなす鋭角と直線 m, n がなす鋭角が等しくなる. この状況のもとで, 以下の問いに答えよ.

(a) 点 $P(\cos t, \sin t)$ の座標を求めよ.

(b) 直線 l と n のなす鋭角を θ とおく. また, 点 O を中心とし半径が 1 の円と直線 n との 2 交点のうち, y 座標が正の点を $S(\cos \phi, \sin \phi)$ とおく. このとき, $\theta = \phi$ を示せ.

4

(必答問題) (配点 50)

 α, β を

$$\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{(3n+1)(3n+2)(3n+3) \cdots (3n+n)}{(n+1)(n+2)(n+3) \cdots (n+n)} \right)^{\frac{1}{n}}$$

および

$$\beta = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{(3n^2+1^2)(3n^2+2^2)(3n^2+3^2) \cdots (3n^2+n^2)}{(n^2+1^2)(n^2+2^2)(n^2+3^2) \cdots (n^2+n^2)} \right)^{\frac{1}{n}}$$

とおく. このとき $\alpha < \beta$ を示せ. また, α と β の値をそれぞれ求めよ.

1. The first part of the document is a list of the names of the persons who have been appointed to the various offices of the Board of Directors of the Corporation.

2. The second part of the document is a list of the names of the persons who have been appointed to the various offices of the Board of Directors of the Corporation.

3. The third part of the document is a list of the names of the persons who have been appointed to the various offices of the Board of Directors of the Corporation.

4. The fourth part of the document is a list of the names of the persons who have been appointed to the various offices of the Board of Directors of the Corporation.

5