

**1**

(1)

$$24 = 2^3 \cdot 3$$

であるから、

$$\begin{aligned} f(24) &= (2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3) \cdot (3^0 + 3^1) \\ &= 15 \cdot 4 \\ &= 60 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(24) &= (3+1) \cdot (1+1) \\ &= 8 \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \begin{cases} f(24) = 60 \\ g(24) = 8 \end{cases}$$

(2)

$n \geq 2$  なる  $n$  が、

$$n = a_1^{b_1} \cdot a_2^{b_2} \cdots a_{m-1}^{b_{m-1}} \cdot a_m^{b_m}$$

のように素因数分解されたとする。ただし、 $a_1, a_2, \dots, a_m$  はそれぞれ異なる素数で、

$b_1, b_2, \dots, b_m$  はそれぞれ自然数とする。このとき、

$$g(n) = (b_1 + 1)(b_2 + 1) \cdots (b_m + 1)$$

となる。 $(b_1 + 1), (b_2 + 1), \dots, (b_m + 1)$  はそれぞれ 2 以上の自然数であるから、これが奇数となる

のは、 $(b_1 + 1), (b_2 + 1), \dots, (b_m + 1)$  がすべて 3 以上の奇数であるときである。このとき、

$b_1, b_2, \dots, b_m$  は全て正の偶数であり、 $\frac{b_1}{2}, \frac{b_2}{2}, \dots, \frac{b_m}{2}$  は全て自然数であるから、

$$\sqrt{n} = a_1^{\frac{b_1}{2}} \cdot a_2^{\frac{b_2}{2}} \cdots a_{m-1}^{\frac{b_{m-1}}{2}} \cdot a_m^{\frac{b_m}{2}}$$

は整数である。よって、 $n$  は平方数である。また、 $n=1$  のときは  $g(1)=1$  より  $g(n)$  は奇数であるが、1 は平方数であるから、題意を満たす。

(証明終)

(3)

$n$  を素因数分解すると、

$$n = 2^{m-1} \cdot (2^m - 1)^l$$

と表せる。よって、

$$\begin{aligned} f(n) &= \left( \sum_{k=0}^{m-1} 2^k \right) \cdot \left\{ (2^m - 1)^0 + (2^m - 1)^1 \right\} \\ &= \frac{1-2^m}{1-2} \cdot 2^m \\ &= 2 \cdot 2^{m-1} \cdot (2^m - 1) \\ &= 2n \end{aligned}$$

となる。

(証明終)

(4)

$n$  の約数を  $1 = c_1 < c_2 < \cdots < c_{g(n)-1} < c_{g(n)} = n$  を満たすように、 $c_1, c_2, \dots, c_{g(n)}$  とおく。このとき、 $n$  は平方数ではないから、(2) の対偶を考えれば、 $g(n)$  は偶数であると分かる。ここで、約数の

定義より、 $l = 1, 2, \dots, \frac{g(n)}{2}$  において

$$c_l \cdot c_{g(n)+1-l} = n$$

が成立する。よって、

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{g(n)} \frac{1}{c_k} &= \sum_{k=1}^{g(n)} \frac{c_{g(n)+1-k}}{n} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{g(n)} c_k \\ &= \frac{f(n)}{n} \\ &= \frac{2n}{n} \\ &= 2 \end{aligned}$$

となる。

(答) 2

**2**

(1)

$$\begin{aligned}rx(1-x) &= x \\ \Leftrightarrow x\{r(1-x)-1\} &= 0 \\ \Leftrightarrow x\left(x-1+\frac{1}{r}\right) &= 0 \\ \Leftrightarrow x=0, 1-\frac{1}{r}\end{aligned}$$

である。

(答)  $x=0, 1-\frac{1}{r}$

(2)

(1)より  $x=0, 1-\frac{1}{r}$  であるが,  $r>1$  であるから,

$$1-\frac{1}{r}>0$$

である。よって,

$$x_r=1-\frac{1}{r}$$

である。ここで,

$$f'(x)=r(1-x)-rx=r(1-2x)$$

であるから,

$$\begin{aligned}|f'(x)| &< k \\ \Leftrightarrow -k &< r(1-2x) < k \\ \Leftrightarrow -\frac{k}{r} &< 1-2x < \frac{k}{r} \\ \Leftrightarrow \frac{r-k}{2r} &< x < \frac{r+k}{2r} \\ \Leftrightarrow \frac{2-r-k}{2r} &< x-x_r < \frac{2-r+k}{2r}\end{aligned}$$

となる。ここで,  $|r-2|<k$  であるから,

$$2-r-k<0, 2-r+k>0$$

である。よって,  $-\frac{2-r-k}{2r}$  と  $\frac{2-r+k}{2r}$  のうち大きくない方を  $a$  とおけば,  $|x-x_r|<a$  なる任意

の  $x$  で  $|f'(x)|<k$  となる。

(証明終)

(3)

(a)

数学的帰納法を利用して, すべての自然数  $n$  について  $|x_n-x_r|<a$  であることを示す。

[1]  $n=1$  のとき

問の条件より,  $|x_1-x_r|<a$  である。

[2]  $n=l$  において,  $|x_l-x_r|<a$  が成り立つとき

$n=l+1$  のときを考える。  $x_l \neq x_r$  であるならば, 平均値の定理より,  $x_r-a < x'_l < x_r+a$  を満たすある実数  $x'_l$  が存在して,

$$f'(x'_l)=\frac{f(x_l)-f(x_r)}{x_l-x_r}$$

となる。ここで, (2)の結果より  $|f'(x'_l)|<k$  であるから,

$$\begin{aligned}|x_{l+1}-x_r| &= |f(x_l)-f(x_r)| \\ &= |f'(x'_l)||x_l-x_r| \\ &< k \cdot a \\ &< 1 \cdot a \\ &= a\end{aligned}$$

より成立する。一方,  $x_l = x_r$  であるならば,

$$\begin{aligned}x_{l+1}-x_r &= f(x_l)-f(x_r) \\ &= 0 \\ &< a\end{aligned}$$

より成立する。したがって,  $n=l+1$  のときも  $|x_{l+1}-x_r|<a$  が成り立つ。

以上[1], [2]より, すべての自然数  $n$  について  $|x_n-x_r|<a$  であることが示された。

(証明終)

(b)

(a)の結果より, 任意の自然数  $n$  において  $|x_n-x_r|<a$  が成り立つことから,  $n \geq 2$  において

$$|x_n-x_r|=|f'(x'_{n-1})||x_{n-1}-x_r|<k|x_{n-1}-x_r|$$

となる。これを利用すると,

$$\begin{aligned}|x_n-x_r| &< k|x_{n-1}-x_r| \\ &< k^2|x_{n-2}-x_r| \\ &\vdots \\ &< k^{n-1}|x_1-x_r| \\ &< k^{n-1}a\end{aligned}$$

となる。ここで,  $|r-2|<k<1$  より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} k^{n-1}a=0$$

であるから, はさみうちの原理より,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n-x_r|=0$$

となる。すなわち,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n=x_r$$

である。

(証明終)

3

(1)

$$2^x = x^2 \Leftrightarrow \frac{\log x}{x} = \frac{\log 2}{2}$$

である。このとき、 $f(x) = \frac{\log x}{x}$  とおくと、

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}x - \log x}{x^2} = \frac{1 - \log x}{x^2}$$

である。ここで、

$$\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = -\infty$$

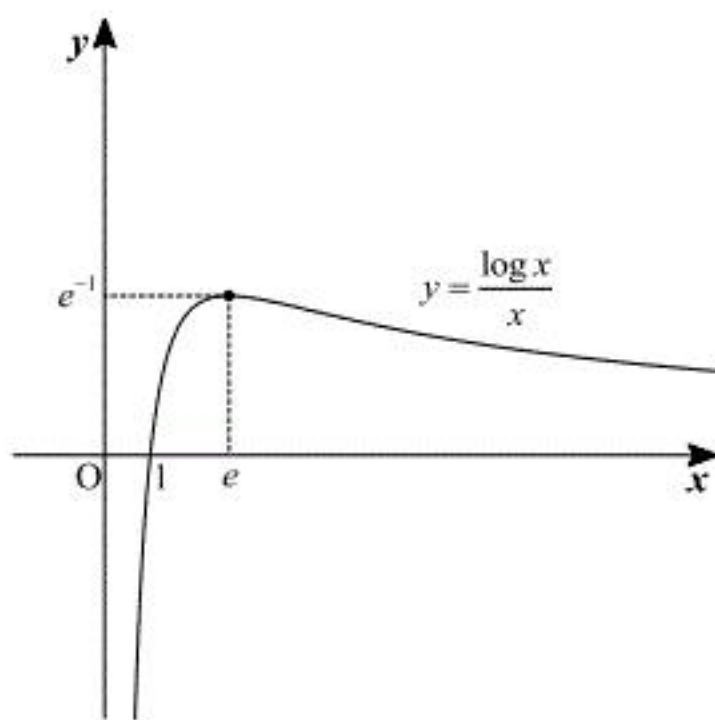
であり、一方、 $t = \log x$  とおくと、 $x \rightarrow \infty$  のとき  $t \rightarrow \infty$  より

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t}{e^t} = 0$$

であるから、 $f(x)$  の増減は以下の通りとなる。

|         |             |            |          |            |
|---------|-------------|------------|----------|------------|
| $x$     | $(0)$       | $\cdots$   | $e$      | $\cdots$   |
| $f'(x)$ |             | $+$        | $0$      | $-$        |
| $f(x)$  | $(-\infty)$ | $\nearrow$ | $e^{-1}$ | $\searrow$ |

よって、 $y = f(x)$  のグラフは以下のようになる。



ここで、 $1 < 2 < e$  より  $0 < f(2) < e^{-1}$  であるから、 $y = f(x)$  と  $y = f(2)$  の交点は、グラフより、2 個存在する。それが、 $2^x = x^2$  の実数解の数である。

(答) 2 個

(2)

(a)

(1)のグラフを利用し、曲線  $y = f(x)$  と直線  $y = f(a)$  の交点の個数を考えればよい。ここで、曲線  $y = f(x)$  と直線  $y = f(a)$  は、 $0 < a \leq 1$  または  $a = e$  のとき 1 点で交わり、 $1 < a < e$  または  $e < a$  のとき 2 点で交わる。

(答)  $0 < a \leq 1$  または  $a = e$  のとき 1 個  
 $1 < a < e$  または  $e < a$  のとき 2 個

(b)

$a = 1$  とすると、条件を満たす  $x$  は  $x = 1$  のみであるが、これは条件  $a \neq x$  に反するため不適である。したがって、 $a$  が自然数であることを考慮すると、 $1 < a < e$  または  $e < a$  の範囲で考えてよい。

[1]  $1 < a < e$  のとき

これを満たす  $a$  は  $a = 2$  のみである。このときグラフより、 $1 < x < e$  を満たす解と  $e < x$  を満たす解が 1 つずつ存在する。前者の解は  $x = 2$  であるが、これは  $a \neq x$  に反するため不適である。後者の解は  $x = 4$  であり、これは題意を満たす。よって、 $(a, x) = (2, 4)$  となる。

[2]  $e < a$  のとき、

[1]と同様に、 $1 < x < e$  を満たす解と  $e < x$  を満たす解が 1 つずつ存在する。後者の解は  $x = a$  であるが、これは  $a \neq x$  に反するため不適である。一方、前者の解として考えられるのは  $x = 2$  のみであり、[1]の考察を踏まえると、 $a = 4$  に限られる。以上より、 $(a, x) = (4, 2)$  となる。

以上[1],[2]より、題意を満たすのは、 $(a, x) = (2, 4), (4, 2)$  である。

(答)  $(a, x) = (2, 4), (4, 2)$

(1)

問題文中の「3回連続して表が出る」を「3回以上連続して表が出る」と解釈する。すなわち、4回連続して表が出る場合などを含めて考える。

コインを投げた結果のうち、題意を満たすのは以下の場合である。

[1] 1回目から3回連続で表が出た場合

このとき、4回目以降はいずれの面が出てても良いから、その確率は、

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

である。

[2] 1回目は裏が出たが、2回目から3回連続で表が出た場合

このとき、5回目以降はいずれの面が出てても良いから、その確率は、

$$\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$$

である。

[3] 2回目は裏が出たが、3回目から3回連続で表が出た場合

このとき、1回目と6回目以降はいずれの面が出てても良いから、その確率は、

$$\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$$

である。

[4] 3回目は裏が出たが、4回目から3回連続で表が出た場合

このとき、1, 2, 7回目はいずれの面が出てても良いから、その確率は、

$$\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$$

である。

[5] 4回目は裏が出たが、5回目から3回連続で表が出て、かつ1, 2, 3回目に3連続で表が出ていない場合

このとき、1, 2, 3回目が全て表である場合を除いて題意を満たすから、その確率は、

$$\left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^3\right\} = \frac{7}{128}$$

である。

以上[1], [2], [3], [4], [5]より、3回連続して表が出る確率は、

$$\frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{7}{128} = \frac{47}{128}$$

である。

(答)  $\frac{47}{128}$

(2)

$$p(k) = \left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{2}{3}\right)^{25-k} {}_{25}C_k = (3^{-25} \cdot 25!) \cdot \frac{2^{25-k}}{k!(25-k)!}$$

であるから、

$$\frac{p(k+1)}{p(k)} = \frac{\frac{2^{24-k}}{(k+1)!(24-k)!}}{\frac{2^{25-k}}{k!(25-k)!}} = \frac{25-k}{2(k+1)}$$

となる。ここで、

$$\frac{25-k}{2(k+1)} > 1 \Leftrightarrow k < \frac{23}{3}$$

であるから、 $k=1, 2, \dots, 7$ では $\frac{p(k+1)}{p(k)} > 1$ となり、 $k=8, 9, \dots, 24$ では $\frac{p(k+1)}{p(k)} < 1$ となる。よって、 $p(k)$ が最大となるのは、 $k=8$ のときである。

(答) 8

(3)

$n$ 回目に投げるコインが真のコインである確率を $q_n$ とすれば、 $n$ 回目に投げるコインが偽のコインである確率は $1-q_n$ であるから、以下の漸化式が成立する。

$$\begin{aligned} q_{n+1} &= \frac{1}{2}q_n + \frac{2}{3}(1-q_n) \\ &= -\frac{1}{6}q_n + \frac{2}{3} \end{aligned}$$

最初はコインを無作為に選ぶため、 $q_1 = \frac{1}{2}$ である。このとき、漸化式を変形すると、

$$\begin{aligned} q_{n+1} &= -\frac{1}{6}q_n + \frac{2}{3} \\ \Leftrightarrow q_{n+1} - \frac{4}{7} &= -\frac{1}{6}\left(q_n - \frac{4}{7}\right) \end{aligned}$$

であり、

$$q_1 - \frac{4}{7} = -\frac{1}{14}$$

であるから、

$$\begin{aligned} q_n - \frac{4}{7} &= \left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1} \left(q_1 - \frac{4}{7}\right) \\ \Leftrightarrow q_n &= \frac{3}{7} \cdot \left(-\frac{1}{6}\right)^n + \frac{4}{7} \end{aligned}$$

となる。ここで、 $n$ 回目が表であるか、 $n$ 回目に投げたコインが真のコインであるかのどちらかが生じる場合の余事象は、 $n$ 回目に偽のコインを投げて裏が出ることである。よって、 $n$ 回目が表であるか、 $n$ 回目に投げたコインが真のコインであるかのどちらかが生じる確率は、

$$1 - (1-q_n) \cdot \frac{2}{3} = 1 + \frac{2}{7} \cdot \left(-\frac{1}{6}\right)^n - \frac{2}{7} = \frac{2}{7} \cdot \left(-\frac{1}{6}\right)^n + \frac{5}{7}$$

である。

(答)  $\frac{2}{7} \cdot \left(-\frac{1}{6}\right)^n + \frac{5}{7}$