

1

(1)

$z = x + yi$ (x, y は実数) とおくと, $\bar{z} = x - yi$ となるから,

$$x = \frac{z + \bar{z}}{2}, y = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

である。 $|z| \leq |z - (\sqrt{3} + i)|$ を x, y で表すと,

$$|z| \leq |z - (\sqrt{3} + i)|$$

$$\Leftrightarrow |z|^2 \leq |z - (\sqrt{3} + i)|^2 \left(\because |z|, |z - (\sqrt{3} + i)| > 0 \right)$$

$$\Leftrightarrow z\bar{z} \leq (z - \sqrt{3} - i)(\overline{z - \sqrt{3} - i})$$

$$\Leftrightarrow z\bar{z} \leq (z - \sqrt{3} - i)(\bar{z} - \sqrt{3} + i)$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq -\sqrt{3}(z + \bar{z}) + i(z - \bar{z}) + 3^2 + 1^2$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq -2\sqrt{3}\frac{z + \bar{z}}{2} - 2\frac{z - \bar{z}}{2i} + 4$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq -2\sqrt{3}x - 2y + 4$$

$$\Leftrightarrow y \leq -\sqrt{3}x + 2$$

となる。同様に, $|z - \bar{z}| = |2yi| = |2y|$ より,

$$|z - \bar{z}| \leq 1 \Leftrightarrow |y| \leq \frac{1}{2}$$

となり, $|z - 2i|^2 = |x + (y - 2)i|^2 = x^2 + (y - 2)^2$ より,

$$|z - 2i| \leq 2$$

$$\Leftrightarrow |z - 2i|^2 \leq 4$$

$$\Leftrightarrow x^2 + (y - 2)^2 \leq 4$$

となる。したがって, 求める領域は $y \leq -\sqrt{3}x + 2, |y| \leq \frac{1}{2}$ および $x^2 + (y - 2)^2 \leq 4$ を同時に満た

す領域である。直線 $y = -\sqrt{3}x + 2$ と直線 $y = \frac{1}{2}$ の交点の実部は,

$$\frac{1}{2} = -\sqrt{3}x + 2 \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

であり, 円 $x^2 + (y - 2)^2 = 4$ と直線 $y = \frac{1}{2}$ の交点の実部は,

$$x^2 + \left(\frac{1}{2} - 2\right)^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm \frac{\sqrt{7}}{2}$$

である。また, 円 $x^2 + (y - 2)^2 = 4$ と直線 $y = -\sqrt{3}x + 2$ の交点の実部は

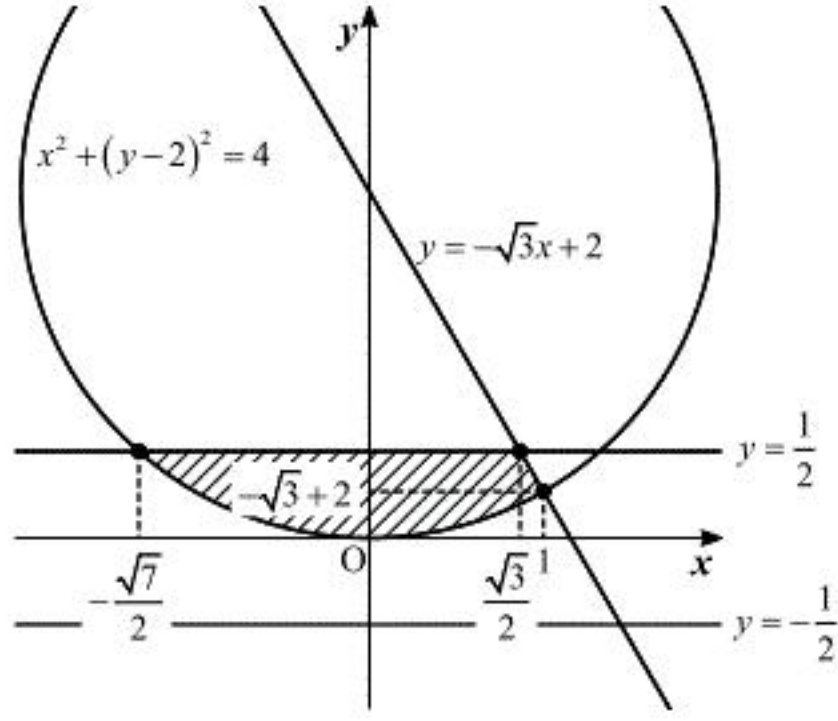
$$x^2 + (-\sqrt{3}x + 2 - 2)^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow x = \pm 1$$

であるから, 2 交点を表す複素数は, $\pm 1 + (\mp\sqrt{3} + 2)i$ となる(複号同順)。以上をふまえて, 求め

る領域を図示すると下の図の斜線部分になる。ただし境界線を含む。



(答) 前図(境界線を含む)

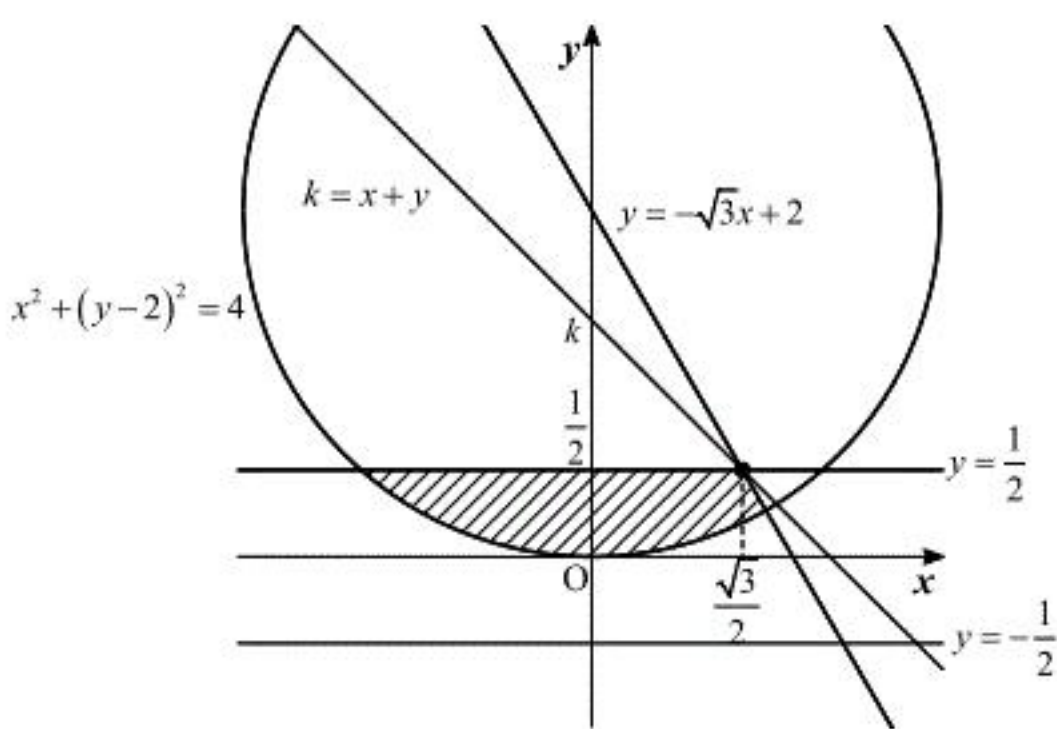
(2)

実部が最大となる点 α は, (1) の図より,

$$\alpha = 1 + (-\sqrt{3} + 2)i$$

となる。また, (1) で求めた領域内の点 $z = x + yi$ について, 実部と虚部の和を k とすると, 直線 $k = x + y$ はこの点を通るから, 直線 $k = x + y$ はこの領域と共有点を持つ。逆に, 直線 $k = x + y$ がこの領域と共有点を持つとき, 領域内の点で $z = x + yi$ を満たすものが存在する。したがって, $x + y$ の最大値は, 直線 $k = x + y$ がこの領域と共有点を持つような k の最大値に等しい。

k が最大となるのは下の図のような場合である。



上図より, k が最大となる点 β は,

$$\beta = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

である。

(答) $\alpha = 1 + (-\sqrt{3} + 2)i, \beta = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

(3)

与式を変形すると, ド・モアブルの定理より,

$$\begin{aligned} w_n &= \frac{\{1 + (-\sqrt{3} + 2)i\}(\sqrt{3} + i)^{3(n-1)}}{2^{4(n-1)}} \\ &= \{1 + (-\sqrt{3} + 2)i\} \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{3} + i}{2} \right)^3 \right\}^{n-1} \\ &= \{1 + (-\sqrt{3} + 2)i\} \left\{ \frac{1}{2} \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)^3 \right\}^{n-1} \\ &= \{1 + (-\sqrt{3} + 2)i\} \left\{ \frac{1}{2} \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) \right\}^{n-1} \\ &= \{1 + (-\sqrt{3} + 2)i\} \left(\frac{i}{2} \right)^{n-1} \end{aligned}$$

となる。 N を 1 以上の整数とすると,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N w_n &= \sum_{n=1}^N \{1 + (-\sqrt{3} + 2)i\} \left(\frac{i}{2} \right)^{n-1} \\ &= \{1 + (-\sqrt{3} + 2)i\} \frac{1 - \left(\frac{i}{2}\right)^N}{1 - \frac{i}{2}} \\ &= \{1 + (-\sqrt{3} + 2)i\} \frac{2(2+i)}{(2-i)(2+i)} \left\{ 1 - \left(\frac{i}{2}\right)^N \right\} \\ &= \frac{2\sqrt{3} + (10 - 4\sqrt{3})i}{5} \left\{ 1 - \left(\frac{i}{2}\right)^N \right\} \end{aligned}$$

となる。 $N \rightarrow \infty$ のとき $\left| \left(\frac{i}{2}\right)^N \right| = \frac{1}{2^N} \rightarrow 0$ となるから, $\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N w_n = \frac{2\sqrt{3} + (10 - 4\sqrt{3})i}{5}$ となる。よ

って, 複素数 z の実部を $\operatorname{Re}(z)$ と表すと,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} R_n &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N R_n \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \operatorname{Re}(w_n) \\ &= \operatorname{Re} \left(\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N w_n \right) \\ &= \operatorname{Re} \left(\frac{2\sqrt{3} + (10 - 4\sqrt{3})i}{5} \right) \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{5} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{2\sqrt{3}}{5}$

(1)

直線 l_1 と直線 l_2 の交点を原点として、直線 l_1 にそって x 軸をとり、直線 l_2 にそって y 軸をとり、直線 l_1 と直線 l_2 に垂直に z 軸をとる。このとき、円柱 C_1 の方程式は、

$$y^2 + z^2 \leq r^2$$

となり、円柱 C_2 の方程式は、

$$x^2 + z^2 \leq r^2$$

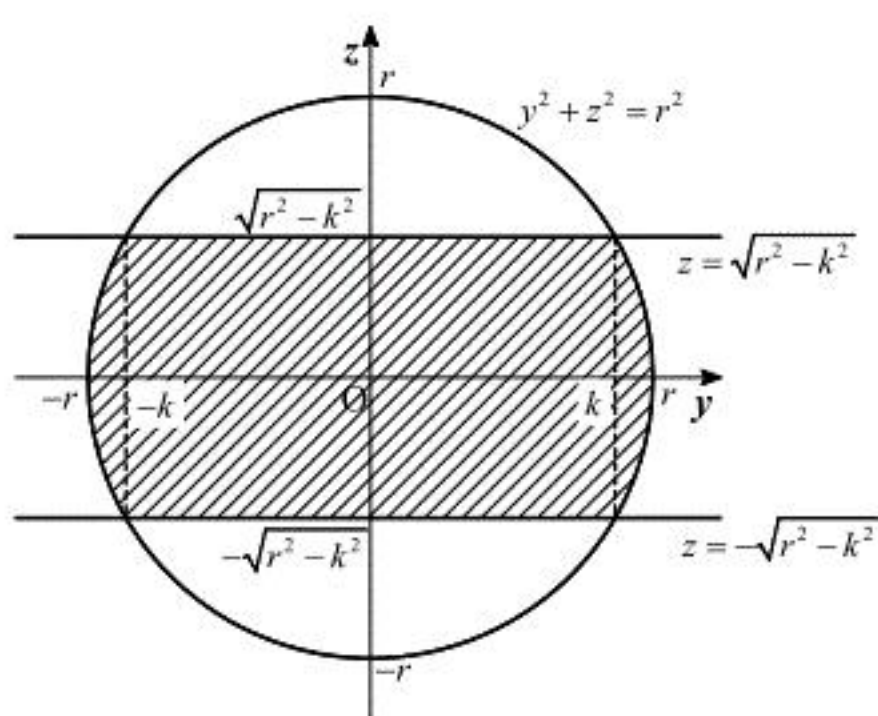
となる。直線 l_1 に直交する平面は、定数 k を用いて $x = k$ とかける。円柱 C_2 は $-r \leq x \leq r$ の範囲に存在するから、立体 D は $x < -r$, $r < x$ の範囲には存在しない。 $-r \leq k \leq r$ のとき平面 $x = k$ での立体 D の切り口は、平面 $x = k$ での円柱 C_1 の切り口と平面 $x = k$ での円柱 C_2 の切り口の共通部分となる。平面 $x = k$ での円柱 C_1 の切り口は、

$$y^2 + z^2 \leq r^2, x = k$$

であり、平面 $x = k$ での円柱 C_2 の切り口は、

$$x^2 + z^2 \leq r^2, x = k \Leftrightarrow |z| \leq \sqrt{r^2 - k^2}, x = k$$

である。これを図示すると下の図の斜線部分になる。ただし境界線を含む。



(答) 前図(境界線を含む)

(2)

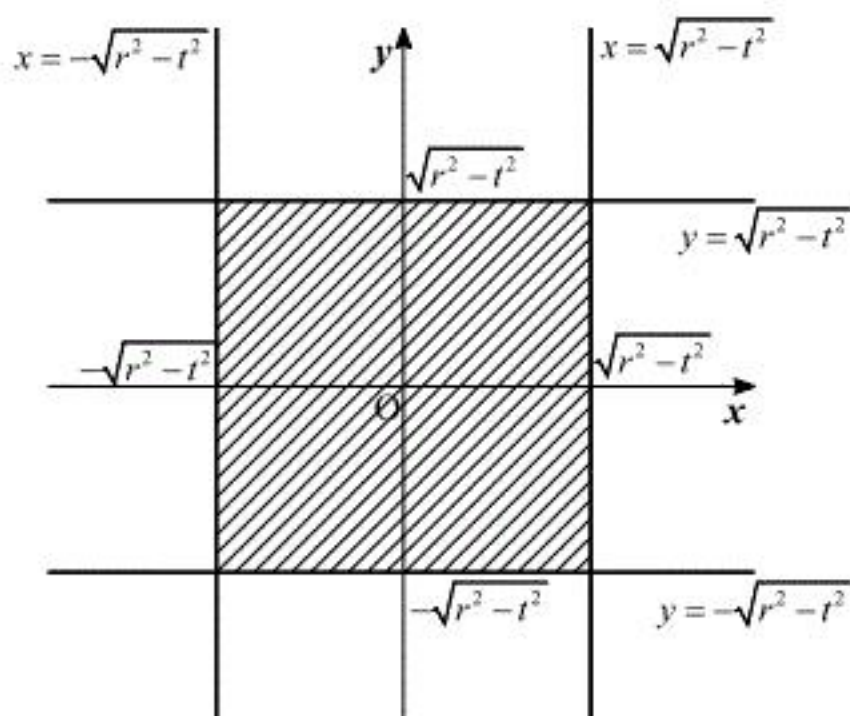
直線 l_1 と l_2 を含む平面に平行な平面は、定数 t を用いて $z = t$ とかける。円柱 C_1 は $-r \leq z \leq r$ の範囲に存在するから、立体 D は $z < -r$, $r < z$ の範囲には存在しない。 $-r \leq t \leq r$ のとき平面 $z = t$ での立体 D の切り口は、平面 $z = t$ での円柱 C_1 の切り口と平面 $z = t$ での円柱 C_2 の切り口の共通部分となる。(1)と同様にして、平面 $z = t$ での円柱 C_1 の切り口は、

$$y^2 + z^2 \leq r^2, z = t \Leftrightarrow |y| \leq \sqrt{r^2 - t^2}, z = t$$

であり、平面 $z = t$ での円柱 C_2 の切り口は、

$$x^2 + z^2 \leq r^2, z = t \Leftrightarrow |x| \leq \sqrt{r^2 - t^2}, z = t$$

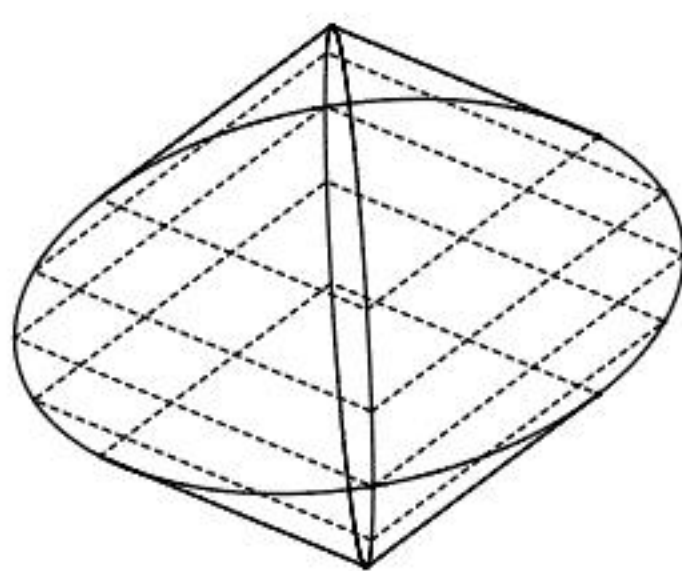
である。これを図示すると下の図の斜線部分になる。ただし境界線を含む。



(答) 前図(境界線を含む)

(3)

(1), (2)より、立体 D の概形は下の図のようになる。



(答) 前図

(4)

(2)で求めた切り口の面積を $S(t)$ とすると、

$$\begin{aligned} S(t) &= \left(2\sqrt{r^2 - t^2}\right)^2 \\ &= 4(r^2 - t^2) \end{aligned}$$

となる。よって、立体 D の体積は、

$$\begin{aligned} \int_{-r}^r S(t) dt &= \int_{-r}^r 4(r^2 - t^2) dt \\ &= 4 \left[r^2 t - \frac{t^3}{3} \right]_{-r}^r \\ &= \frac{16}{3} r^3 \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{16}{3} r^3$

与式を変形すると、

$$\begin{aligned} f(x) &= \log\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{1+x} - \frac{a}{(1+x)^2} \\ &= \log(1+x) - \log x - \frac{1}{1+x} - \frac{a}{(1+x)^2} \quad (\because x > 0) \end{aligned}$$

となるから、これを微分して、

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1+x} - \frac{1}{x} + \frac{1}{(1+x)^2} + \frac{2a}{(1+x)^3} \\ &= -\frac{1}{x(1+x)} + \frac{1}{(1+x)^2} + \frac{2a}{(1+x)^3} \\ &= -\frac{1}{x(1+x)^2} + \frac{2a}{(1+x)^3} \\ &= \frac{-(1+x) + 2ax}{x(1+x)^3} \\ &= \frac{(2a-1)x-1}{x(1+x)^3} \end{aligned}$$

となる。 $x > 0$ より、 $x(1+x)^3 > 0$ となる。また、 $a > \frac{1}{2}$ より、 $2a-1 > 0$ となる。よって、 $f(x)$

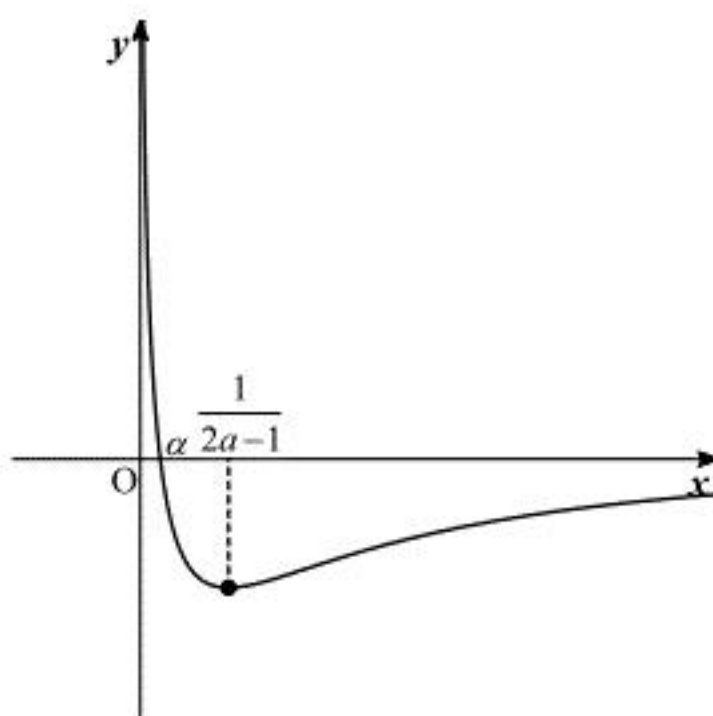
の増減表は以下のようになる。

x	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{2a-1}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$

上表と

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +0} f(x) &= +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= 0 \end{aligned}$$

に注意してグラフを描くと以下のようになる。



グラフより、 $f(x) = 0$ を満たす x はただ1つ存在する。これを α とする。

[1] $2 \leq \alpha$ のとき

グラフより、 $1 \leq x \leq 2$ において、常に $f(x) \geq 0$ が成り立つ。

[2] $1 < \alpha < 2$ のとき

グラフより、 $f(1) > 0$ 、 $f(2) < 0$ となる。これは、 $f(1)f(2) \geq 0$ を満たさないため不適切である。

[3] $0 < \alpha \leq 1$ のとき

グラフより、 $1 \leq x \leq 2$ において、常に $f(x) \leq 0$ が成り立つ。

以上[1], [2], [3]より、 $1 \leq x \leq 2$ の範囲で常に $f(x) \geq 0$ 、またはこの範囲で常に $f(x) \leq 0$ が成り立つ。したがって、

$$\begin{aligned} \int_1^2 |f(x)| dx &= \left| \int_1^2 f(x) dx \right| \\ &= \left| \int_1^2 \left\{ \log(1+x) - \log x - \frac{1}{1+x} - \frac{a}{(1+x)^2} \right\} dx \right| \end{aligned}$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned} \int \log x dx &= x \log x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= x \log x - x + C \end{aligned}$$

である。ただし、 C は積分定数とする。よって、

$$\begin{aligned} \int_1^2 |f(x)| dx &= \left| \left[(1+x) \log(1+x) - (1+x) - x \log x + x - \log(1+x) + \frac{a}{1+x} \right]_1^2 \right| \\ &= \left| \left[x \log \left(\frac{1+x}{x} \right) + \frac{a}{1+x} \right]_1^2 \right| \\ &= \left| \left(2 \log \frac{3}{2} + \frac{a}{3} \right) - \left(\log 2 + \frac{a}{2} \right) \right| \\ &= \left| \log \frac{9}{8} - \frac{a}{6} \right| \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \left| \log \frac{9}{8} - \frac{a}{6} \right|$$

(1)

平均値： 各データの値の総和をデータの個数で割った値をいう。

最頻値： その値をとるデータの個数が最も多いような値をいう。

中央値： データを値の大きさの順に並べたとき、中央の位置にくる値をいう。ただし、データの個数が偶数のときは、中央の2つの値の平均値を中央値とする。

(答) 前述

(2)

表Aの平均値は、

$$\frac{3 \times 0 + 4 \times 0 + 5 \times 8 + 6 \times 18 + 7 \times 28 + 8 \times 25 + 9 \times 14 + 10 \times 7}{100} = 7.4$$

となり、表Bの平均値は、

$$\frac{3 \times 9 + 4 \times 15 + 5 \times 26 + 6 \times 22 + 7 \times 15 + 8 \times 9 + 9 \times 4 + 10 \times 0}{100} = 5.62$$

となる。また、表Aの最頻値は7であり、表Bの最頻値は5である。また、表Aの中央値は、

$8 + 18 = 26$, $8 + 18 + 28 = 54$ より7となり、表Bの中央値は、 $9 + 15 + 26 = 50$ より $\frac{5+6}{2} = 5.5$ となる。

(答) 表Aの平均値:7.4, 表Bの平均値:5.62

表Aの最頻値:7, 表Bの最頻値:5

表Aの中央値:7, 表Bの中央値:5.5

(3)

表AでHbA1cが c 未満の人数と、表BでHbA1cが c 以上の人数の合計を $S(c)$ とすると、誤診率は、 $S(c)$ を200で割ったものである。 c が各値をとるときの $S(c)$ の値は下の表のようになる。

c	3	4	5	6	7	8	9	10
$S(c)$	100	91	76	58	54	67	83	93

$S(c)$ が最小となるとき誤診率も最小となるから、誤診率が最小となるのは $c=7$ のときである。

(答) 7

(4)

健常者でありながら糖尿病と判定される人数を、糖尿病と判定される人数で割った比率を誤診率と定義する。この定義では、誤診率を最小とすることで糖尿病と診断されたときに実際に糖尿病である確率が最大となる。

また、糖尿病患者でありながら健常者と判定される人数を、健常者と判定される人数で割った比率を誤診率と定義する。この定義では、誤診率を最小とすることで健常者と診断されたときに実際に健常者である確率が最大となる。

(答) 前述