

(1)

不定積分 I_2 を求めると,

$$\begin{aligned} I_2 &= \int \frac{1}{\cos^2 x} dx \\ &= \tan x + C \end{aligned}$$

となる。ただし、 C は積分定数である。

(答) $I_2 = \tan x + C$ (C は積分定数)

(2)

不定積分 I_4 を求めると,

$$\begin{aligned} I_4 &= \int \frac{1}{\cos^4 x} dx \\ &= \int (1 + \tan^2 x) \frac{1}{\cos^2 x} dx \\ &= \int (1 + \tan^2 x) (\tan x)' dx \\ &= \tan x + \frac{1}{3} \tan^3 x + C \end{aligned}$$

となる。ただし、 C は積分定数である。

(答) $I_4 = \tan x + \frac{1}{3} \tan^3 x + C$ (C は積分定数)

(3)

部分積分の公式を用いて,

$$\begin{aligned} I_3 &= \int \frac{1}{\cos^3 x} dx \\ &= \int (\tan x)' \cdot \frac{1}{\cos x} dx \\ &= \frac{\tan x}{\cos x} - \int \tan x \cdot \left(-\frac{\sin x}{\cos^2 x} \right) dx \\ &= \frac{\sin x}{\cos^2 x} - \int \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x} dx \\ &= \frac{\sin x}{\cos^2 x} - \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^3 x} dx \\ &= \frac{\sin x}{\cos^2 x} - \int \frac{1}{\cos^3 x} dx + \int \frac{1}{\cos x} dx \\ &= \frac{\sin x}{\cos^2 x} - I_3 + I_1 \end{aligned}$$

となる。よって,

$$I_3 = \frac{1}{2} \left(\frac{\sin x}{\cos^2 x} + I_1 \right)$$

である。ここで、不定積分 I_1 を求めると,

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \frac{1}{\cos x} dx \\ &= \int \frac{\cos x}{\cos^2 x} dx \\ &= \int \frac{\cos x}{1 - \sin^2 x} dx \\ &= \int \frac{\cos x}{(1 + \sin x)(1 - \sin x)} dx \\ &= \frac{1}{2} \int \left\{ \frac{1}{1 + \sin x} + \frac{1}{1 - \sin x} \right\} (\sin x)' dx \\ &= \frac{1}{2} (\log |1 + \sin x| - \log |1 - \sin x|) + C' \\ &= \frac{1}{2} \log \left(\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} \right) + C' \end{aligned}$$

となる。ただし、 C' は積分定数である。以上より,

$$\begin{aligned} I_3 &= \frac{1}{2} \left(\frac{\sin x}{\cos^2 x} + \frac{1}{2} \log \left(\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} \right) + C' \right) \\ &= \frac{\sin x}{2 \cos^2 x} + \frac{1}{4} \log \left(\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} \right) + C \end{aligned}$$

となる。ただし、 $C = \frac{C'}{2}$ を改めて積分定数とした。

(答) $I_3 = \frac{\sin x}{2 \cos^2 x} + \frac{1}{4} \log \left(\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} \right) + C$ (C は積分定数)

(1)

${}_nC_k = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-k+1)}{k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdots 1}$ である。ここで、 $i=0, 1, \dots, k-1$ において、

$$\frac{n-i}{k-i} - \frac{n}{k} = \frac{k(n-i) - n(k-i)}{k(k-i)} = \frac{(n-k)i}{k(k-i)} \geq 0 \quad (\because k \leq n \Leftrightarrow n-k \geq 0)$$

より $\frac{n-i}{k-i} \geq \frac{n}{k}$ であるから、

$${}_nC_k = \frac{n}{k} \cdot \frac{n-1}{k-1} \cdot \frac{n-2}{k-2} \cdots \frac{n-(k-1)}{k-(k-1)} \geq \left(\frac{n}{k}\right)^k$$

となり、与式は示された。

(証明終)

(2)

$f(t) = e^t - (1+t)$ とおくと、 $f'(t) = e^t - 1$ であり、 $f'(t) = 0$ のとき、 $t = 0$ である。よって、 $f(t)$ の増減表は以下のようになる。

t	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(t)$	$-$	0	$+$
$f(t)$	$\searrow$	0	$\nearrow$

増減表より、すべての実数 t に対して、 $f(t) \geq 0 \Leftrightarrow 1+t \leq e^t$ であることが示された。

(証明終)

(3)

(2) と $t \geq 0$ であることより、

$$e^m = (e^t)^n \geq (1+t)^n$$

である。また、二項定理より

$$(1+t)^n = \sum_{i=0}^n {}_nC_i t^i$$

である。 $k \leq n$ 、 $t \geq 0$ より $k=0, 1, \dots, n$ について ${}_nC_k t^k \geq 0$ であるから、

$$\sum_{i=0}^n {}_nC_i t^i \geq {}_nC_k t^k$$

となる。以上より ${}_nC_k t^k \leq e^m$ が示された。

(証明終)

(4)

$\frac{k}{n} \geq 0$ であるから、(3) で示された不等式に $t = \frac{k}{n}$ を代入すると、

$${}_nC_k \left(\frac{k}{n}\right)^k \leq e^{\frac{k}{n}} \Leftrightarrow {}_nC_k \leq \left(\frac{en}{k}\right)^k$$

となり、与式は示された。

(証明終)

(5)

(1) と (4) より、

$$\left(\frac{n}{k}\right)^k \leq {}_nC_k \leq \left(\frac{en}{k}\right)^k$$

である。この不等式に $n=10^{23}$ 、 $k=10^2$ を代入すると、

$$\left(10^{23-2}\right)^{100} \leq {}_nC_k \leq \left(e \cdot 10^{23-2}\right)^{100}$$

$$\Leftrightarrow 10^{2100} \leq {}_nC_k \leq e^{100} \cdot 10^{2100}$$

となる。ここで、

$$e^{100} < 3^{100} = 3^{2 \cdot 50} = 9^{50} < 10^{50}$$

であるから、

$$e^{100} \cdot 10^{2100} < 10^{2150}$$

である。よって、

$$10^{2100} \leq {}_nC_k < 10^{2150}$$

となる。これは、 ${}_nC_k$ の桁数が 2101 以上 2151 未満であることを表している。ゆえに、 ${}_nC_k$ の桁数の下 2 桁を切り捨てた値は 2100 となる。

(答) 2100

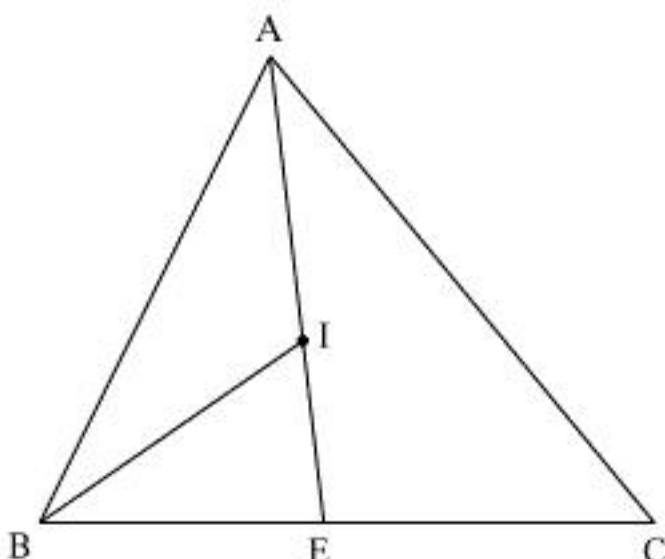
3

(1)

$\overrightarrow{IG} = \overrightarrow{AG} - \overrightarrow{AI}$ であるから、 $\overrightarrow{AG}$ と $\overrightarrow{AI}$ をそれぞれ求めることを考える。点 G は $\triangle ABC$ の重心であるから、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AG} &= \frac{\overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{3} \\ &= \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\end{aligned}$$

となる。また、直線 AI と辺 BC の交点を E とおくと、 $\triangle ABC$ と内心 I は以下の図のようにかける。



直線 AE は $\angle BAC$ の二等分線であるから、 $BE:CE = AB:AC = c:b$ であり、

$$\overrightarrow{AE} = \frac{b}{b+c}\overrightarrow{AB} + \frac{c}{b+c}\overrightarrow{AC}$$

である。また、直線 BI は $\angle EBA$ の二等分線であるから、 $AI:IE = AB:BE$ であり、BE の長さは $\frac{c}{b+c} \cdot a$ であるから、

$$\overrightarrow{AI} = \frac{c}{c + \frac{ac}{b+c}}\overrightarrow{AE} = \frac{b+c}{a+b+c}\overrightarrow{AE}$$

である。よって、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AI} &= \frac{b+c}{a+b+c} \left(\frac{b}{b+c}\overrightarrow{AB} + \frac{c}{b+c}\overrightarrow{AC} \right) \\ &= \frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{AB} + \frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{AC}\end{aligned}$$

となる。以上より、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{IG} &= \overrightarrow{AG} - \overrightarrow{AI} \\ &= \left(\frac{1}{3} - \frac{b}{a+b+c} \right) \overrightarrow{AB} + \left(\frac{1}{3} - \frac{c}{a+b+c} \right) \overrightarrow{AC}\end{aligned}$$

となり、示された。

(証明終)

(2)

$\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ は一次独立であるから、(1)より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{IG} &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{3} - \frac{b}{a+b+c} = 0 \\ \frac{1}{3} - \frac{c}{a+b+c} = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 3b = a+b+c \\ 3c = a+b+c \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 2b - c = a \\ -b + 2c = a \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} b = a \\ c = a \end{cases} \\ \Leftrightarrow a = b = c \\ \Leftrightarrow \triangle ABC \text{ は正三角形} \end{aligned}$$

となる。よって、 $\overrightarrow{IG} = \vec{0}$ は $\triangle ABC$ が正三角形であるための必要十分条件である。

(証明終)

(3)

$\triangle ABC$ が正三角形でないとき、(2)より $\overrightarrow{IG} \neq \vec{0}$ である。線分 IG と平行な辺が存在するとき、どの辺と平行かによって場合分けをする。

[1] IG と AC が平行のとき

(1)の式において、 $\overrightarrow{AB}$ の係数が 0 であることが必要十分であるから、

$$\begin{aligned}\frac{1}{3} - \frac{b}{a+b+c} &= 0 \\ \Leftrightarrow 3b &= a+b+c \\ \Leftrightarrow 2b &= a+c\end{aligned}$$

となる。これは、 a, b, c の順に等差数列であることを表している。逆に、 a, b, c または c, b, a の順に等差数列であるとき、IG と AC は平行である。

[2] IG と AB が平行のとき

[1]と同様にして、

$$\begin{aligned}\frac{1}{3} - \frac{c}{a+b+c} &= 0 \\ \Leftrightarrow 3c &= a+b+c \\ \Leftrightarrow 2c &= a+b\end{aligned}$$

となる。これは、 a, c, b の順に等差数列であることを表している。逆に、 a, c, b または b, c, a の順に等差数列であるとき、IG と AB は平行である。

[3] IG と BC が平行のとき

(1)の式において、 $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ を代入すると、

$$\overrightarrow{IG} = \left(\frac{2}{3} - \frac{b+c}{a+b+c} \right) \overrightarrow{AB} + \left(\frac{1}{3} - \frac{c}{a+b+c} \right) \overrightarrow{BC}$$

である。 $\overrightarrow{AB}$ の係数が 0 であることが必要十分条件であるので、

$$\begin{aligned}\frac{2}{3} - \frac{b+c}{a+b+c} &= 0 \\ \Leftrightarrow 3(b+c) &= 2(a+b+c) \\ \Leftrightarrow 2a &= b+c\end{aligned}$$

となる。これは、 b, a, c の順に等差数列であることを表している。逆に、 b, a, c または c, a, b の順に等差数列であるとき、IG と BC は平行である。

以上[1], [2], [3]より、 $\triangle ABC$ が正三角形でないとき、条件 p と条件 q は同値である。

(証明終)

(1)

恒等式 $(x-a)(x-b)(x-c) = x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ca)x - abc$ に $x=a$ を代入すると、

$$a^3 - (a+b+c)a^2 + (ab+bc+ca)a - abc = 0$$

となる。両辺に a^n をかけると、

$$a^{n+3} - (a+b+c)a^{n+2} + (ab+bc+ca)a^{n+1} - abc \cdot a^n = 0$$

となる。同様にして、

$$b^{n+3} - (a+b+c)b^{n+2} + (ab+bc+ca)b^{n+1} - abc \cdot b^n = 0$$

$$c^{n+3} - (a+b+c)c^{n+2} + (ab+bc+ca)c^{n+1} - abc \cdot c^n = 0$$

である。3つの式の両辺を足して、

$$\begin{aligned} & (a^{n+3} + b^{n+3} + c^{n+3}) - (a+b+c)(a^{n+2} + b^{n+2} + c^{n+2}) \\ & + (ab+bc+ca)(a^{n+1} + b^{n+1} + c^{n+1}) - abc(a^n + b^n + c^n) = 0 \\ \therefore S_{n+3} - (a+b+c)S_{n+2} + (ab+bc+ca)S_{n+1} - abcS_n &= 0 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad S_{n+3} - (a+b+c)S_{n+2} + (ab+bc+ca)S_{n+1} - abcS_n = 0$$

(2)

$a+b+c=0$ のとき、

$$\begin{aligned} ab+bc+ca &= \frac{1}{2} \left\{ (a+b+c)^2 - (a^2+b^2+c^2) \right\} \\ &= -\frac{1}{2} S_2 \end{aligned}$$

であり、また、

$$\begin{aligned} abc &= \frac{1}{3} \left\{ (a^3+b^3+c^3) - (a+b+c)(a^2+b^2+c^2 - ab - bc - ca) \right\} \\ &= \frac{1}{3} S_3 \end{aligned}$$

である。よって、(1)の漸化式は、

$$\begin{aligned} S_{n+3} - 0 \cdot S_{n+2} + \left(-\frac{1}{2} S_2 \right) \cdot S_{n+1} - \frac{1}{3} S_3 \cdot S_n &= 0 \\ \Leftrightarrow S_{n+3} &= \frac{1}{2} S_2 S_{n+1} + \frac{1}{3} S_3 S_n \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

となる。①に $n=2$ を代入すると、

$$S_5 = \frac{1}{2} S_2 S_3 + \frac{1}{3} S_3 S_2 = \frac{5}{6} S_2 S_3$$

である。よって、

$$\frac{S_2 S_3}{S_5} = \frac{S_2 S_3}{\frac{5}{6} S_2 S_3} = \frac{6}{5}$$

となる。また、①に $n=4$ を代入すると、

$$S_7 = \frac{1}{2} S_2 S_5 + \frac{1}{3} S_3 S_4$$

である。ここで、①に $n=1$ を代入すると、

$$S_4 = \frac{1}{2} S_2 S_2 + \frac{1}{3} S_3 S_1 = \frac{1}{2} (S_2)^2 \quad (\because S_1 = 0)$$

であるから、 S_7 の式に S_4 と S_5 の値を代入すると、

$$S_7 = \frac{1}{2} S_2 \cdot \frac{5}{6} S_2 S_3 + \frac{1}{3} S_3 \cdot \frac{1}{2} (S_2)^2 = \frac{7}{12} (S_2)^2 S_3$$

であり、

$$\frac{(S_2)^2 S_3}{S_7} = \frac{(S_2)^2 S_3}{\frac{7}{12} (S_2)^2 S_3} = \frac{12}{7}$$

となる。さらに、

$$\frac{S_2 S_5}{S_7} = \left(S_2 \cdot \frac{5}{6} S_2 S_3 \right) \div \left\{ \frac{7}{12} (S_2)^2 S_3 \right\} = \frac{10}{7}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{S_2 S_3}{S_5} = \frac{6}{5}, \quad \frac{(S_2)^2 S_3}{S_7} = \frac{12}{7}, \quad \frac{S_2 S_5}{S_7} = \frac{10}{7}$$

(3)

(2)で求めた3つの値に共通してあてはまる規則は、それぞれの S の添え字を使ってそのまま計算した場合の値、すなわち $S_n = n$ として計算した場合の値と同じになるということである。実際、

$$\begin{aligned} \frac{S_2 S_3}{S_5} &= \frac{2 \cdot 3}{5} = \frac{6}{5} \\ \frac{(S_2)^2 S_3}{S_7} &= \frac{2^2 \cdot 3}{7} = \frac{12}{7} \\ \frac{S_2 S_5}{S_7} &= \frac{2 \cdot 5}{7} = \frac{10}{7} \end{aligned}$$

となり、確かに満たす。

(答) $S_n = n$ として計算した場合の値と同じになるという規則。