

1

(1)(a)

二項定理より、 $n \geq 3$ のとき

$$\begin{aligned}(1+x)^n &= \sum_{k=0}^n {}_nC_k x^k \cdot 1^{n-k} \\ &= 1+nx+\frac{n(n-1)}{2}x^2+\sum_{k=3}^n {}_nC_k x^k\end{aligned}$$

となる。ここで、 $x>0$ より $k=3, 4, \dots, n$ で ${}_nC_k x^k$ はすべて正の値をとるため

$$\begin{aligned}\sum_{k=3}^n {}_nC_k x^k &> 0 \\ \Leftrightarrow 1+nx+\frac{n(n-1)}{2}x^2+\sum_{k=3}^n {}_nC_k x^k &> 1+nx+\frac{n(n-1)}{2}x^2 \\ \Leftrightarrow (1+x)^n &> 1+nx+\frac{n(n-1)}{2}x^2\end{aligned}$$

となる。

(証明終)

(b)

$n \geq 3$ 、 $x>0$ のもとで $(1+x)^n > 0$ となるため

$$0<\frac{n}{(1+x)^n}$$

である。一方、(a)の結果より

$$(1+x)^n > 1+nx+\frac{n(n-1)}{2}x^2 > 0$$

も成り立つため

$$\begin{aligned}\frac{n}{(1+x)^n} &< \frac{n}{1+nx+\frac{n(n-1)}{2}x^2} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{n}+x+\frac{n-1}{2}x^2}\end{aligned}$$

となる。したがって

$$0<\frac{n}{(1+x)^n} < \frac{1}{\frac{1}{n}+x+\frac{n-1}{2}x^2}$$

が成立する。ここで $x^2 > 0$ であるから

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{n}+x+\frac{n-1}{2}x^2} = 0$$

となる。以上より、はさみうちの原理から $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{(1+x)^n}$ は収束し

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{(1+x)^n} = 0$$

となる。

(答) 収束し、値は0

(2)(a)

$$\begin{aligned}3a_{n+1} &= a_n + \frac{1}{2^{n+1}} \\ \Leftrightarrow 3\left(a_{n+1} - \frac{1}{2^{n+1}}\right) &= a_n - \frac{1}{2^n}\end{aligned}$$

より、 $b_n = a_n - \frac{1}{2^n}$ とおくと、 $n=1, 2, 3, \dots$ において

$$\begin{aligned}3b_{n+1} &= b_n \\ \Leftrightarrow b_{n+1} &= \frac{1}{3}b_n\end{aligned}$$

となる。したがって、数列 $\{b_n\}$ は初項 $b_1 = a_1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ 、公比 $\frac{1}{3}$ の等比数列となるため

$$\begin{aligned}b_n &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \\ \Leftrightarrow a_n - \frac{1}{2^n} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \\ \Leftrightarrow a_n &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + \frac{1}{2^n} \\ \Leftrightarrow a_n &= \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \right\}\end{aligned}$$

である。

$$(答) \ a_n = \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \right\}$$

(b)

$$\sum_{k=1}^n ka_k = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left\{ k \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} + k \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \right\}$$

である。ここで、 $r \neq 1$ のもとで

$$\sum_{k=1}^n kr^{k-1} = r_n$$

とおくと

$$\begin{array}{llll}r_n = & 1+ & 2 \cdot r & +3 \cdot r^2 + \cdots + n \cdot r^{n-1} & \cdots \cdots \textcircled{1} \\ r \cdot r_n = & & r & +2 \cdot r^2 + \cdots + (n-1) \cdot r^{n-1} + n \cdot r^n & \cdots \cdots \textcircled{2}\end{array}$$

となるから、 $\textcircled{1}-\textcircled{2}$ より

$$\begin{aligned}(1-r)r_n &= 1+r+r^2+\cdots+r^{n-1}-n \cdot r^n \\ &= \frac{1-r^n}{1-r}-n \cdot r^n \quad (\because r \neq 1) \\ &= \frac{1-\{1+(1-r)n\}r^n}{1-r}\end{aligned}$$

となる。ゆえに

$$r_n = \frac{1-\{1+(1-r)n\}r^n}{(1-r)^2}$$

となる。したがって

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n ka_k &= \sum_{k=1}^n \left[\frac{1}{2} k \left\{ \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} + \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} \right\} \right] \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left\{ \sum_{k=1}^n k \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} + \sum_{k=1}^n k \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1-\left\{1+\left(1-\frac{1}{2}\right)n\right\}\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} + \frac{1-\left\{1+\left(1-\frac{1}{3}\right)n\right\}\left(\frac{1}{3}\right)^n}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^2} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left\{ 4-(4+2n)\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{9}{4}-\left(\frac{9}{4}+\frac{3}{2}n\right)\left(\frac{1}{3}\right)^n \right\} \\ &= 2-2 \cdot \frac{1}{2^n} - \frac{n}{2^n} + \frac{9}{8} - \frac{9}{8} \cdot \frac{1}{3^n} - \frac{3}{4} \cdot \frac{n}{3^n}\end{aligned}$$

である。ここで、(1)より $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2^n} = 0$ 、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{3^n} = 0$ であるため

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n ka_k &= 2+\frac{9}{8} \\ &= \frac{25}{8}\end{aligned}$$

となる。ゆえに $\sum_{n=1}^{\infty} na_n$ は収束し、その和は $\frac{25}{8}$ となる。

(答) 収束し、和は $\frac{25}{8}$

(1)

$f(x) = x - \sin x$ とおくとき、 $f'(x) = 1 - \cos x$ となる。ここで $\cos x \leq 1$ より $f'(x) \geq 0$ である。
このとき、 $x > 0$ のもとで

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow \cos x &= 1 \\ \Leftrightarrow x &= 2n\pi \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \end{aligned}$$

であるから、 $f'(x) \geq 0$ の等号が常に成立するような区間は存在しない。ゆえに $f(x)$ は $x > 0$ において

$$\begin{aligned} f(x) &> f(0) \\ \Leftrightarrow x &> \sin x \end{aligned}$$

となる。

(証明終)

(2)

(1)の結果より、 $x > 0$ のとき $x > \sin x$ であるため、 $x = \frac{\pi}{18}$ を代入することで

$$\begin{aligned} \sin \frac{\pi}{18} &< \frac{\pi}{18} \\ \Leftrightarrow \sin 10^\circ &< \frac{\pi}{18} \end{aligned}$$

となる。また、 $\sin 10^\circ = \alpha$ とすると、3倍角の公式より

$$\begin{aligned} \sin 30^\circ &= 3\sin 10^\circ - 4\sin^3 10^\circ \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2} &= 3\alpha - 4\alpha^3 \\ \Leftrightarrow \alpha &= \frac{1}{6} + \frac{4}{3}\alpha^3 \end{aligned}$$

が成り立つ。ここで、 $\alpha = \sin 10^\circ > 0$ であるため

$$\begin{aligned} 0 &< \frac{4}{3}\alpha^3 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{6} &< \frac{1}{6} + \frac{4}{3}\alpha^3 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{6} &< \alpha \\ \Leftrightarrow \frac{1}{6} &< \sin 10^\circ \end{aligned}$$

となる。以上より

$$\frac{1}{6} < \sin 10^\circ < \frac{\pi}{18}$$

となる。

(証明終)

$$f(a)f(b-c)+f(b)f(c-a)+f(c)f(a-b)=0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

(1)

①に $a=b=c=0$ を代入すると

$$\begin{aligned} 3\{f(0)\}^3 &= 0 \\ \Leftrightarrow f(0) &= 0 \end{aligned}$$

となる。このもとで、①に $a=x, c=0$ を代入すると

$$\begin{aligned} f(x)f(b)+f(b)f(-x)+f(0)f(x-b) &= 0 \\ \Leftrightarrow f(b)\{f(x)+f(-x)\} &= 0 \end{aligned}$$

となる。

[1] $f(x)$ が任意の x に対し $f(x)=0$ となる定数関数である場合

このとき、すべての実数 x に対し

$$f(-x) = -f(x) = 0$$

となる。

[2] $f(x)$ がある x に対し $f(x) \neq 0$ である場合

このとき $f(b) \neq 0$ を満たす実数 b が存在し、そのとき

$$\begin{aligned} f(b)\{f(x)+f(-x)\} &= 0 \\ \Leftrightarrow f(x)+f(-x) &= 0 \\ \Leftrightarrow f(-x) &= -f(x) \end{aligned}$$

がすべての実数 x に対して成立する。

以上[1], [2]より、すべての実数 x に対して $f(-x) = -f(x)$ が成立する。

(証明終)

(2)

数学的帰納法を利用して、0以上のすべての整数 n に対して

$$f\left(\frac{y}{2}\right) \sum_{k=0}^n f(x+ky) = f\left(x+\frac{n}{2}y\right) f\left(\frac{n+1}{2}y\right) \quad \cdots \textcircled{2}$$

が成立することを示す。

[1] $n=0$ のとき

②において、両辺ともに $f\left(\frac{y}{2}\right)f(x)$ となるため、②は成立する。

[2] $n=m$ (m は0以上の整数)のときの②の成立を仮定する。

このとき

$$f\left(\frac{y}{2}\right) \sum_{k=0}^m f(x+ky) = f\left(x+\frac{m}{2}y\right) f\left(\frac{m+1}{2}y\right) \quad \cdots \textcircled{3}$$

となる。一方、①に $a=x+(m+1)y, b=\frac{m+2}{2}y, c=\frac{m+1}{2}y$ を代入すると、(1)より

$$\begin{aligned} f\left(x+(m+1)y\right)f\left(\frac{y}{2}\right)+f\left(\frac{m+2}{2}y\right)f\left(-x-\frac{m+1}{2}y\right)+f\left(\frac{m+1}{2}y\right)f\left(x+\frac{m}{2}y\right) &= 0 \\ \Leftrightarrow f\left(\frac{y}{2}\right)f\left(x+(m+1)y\right)-f\left(x+\frac{m+1}{2}y\right)f\left(\frac{m+2}{2}y\right)+f\left(x+\frac{m}{2}y\right)f\left(\frac{m+1}{2}y\right) &= 0 \quad (\because (1)) \end{aligned}$$

となるため

$$f\left(\frac{y}{2}\right)f\left(x+(m+1)y\right) = f\left(x+\frac{m+1}{2}y\right)f\left(\frac{m+2}{2}y\right) - f\left(x+\frac{m}{2}y\right)f\left(\frac{m+1}{2}y\right) \quad \cdots \textcircled{4}$$

が成り立つ。したがって、③+④より

$$f\left(\frac{y}{2}\right) \sum_{k=0}^{m+1} f(x+ky) = f\left(x+\frac{m+1}{2}y\right) f\left(\frac{m+2}{2}y\right)$$

となるため、②は $n=m+1$ のときにも成立する。

以上[1], [2]より、数学的帰納法から、0以上のすべての整数 n に対して②が成立する。

(証明終)

(3)

$s=t$ のとき、 $f(0)=0$ より

$$\frac{F(t)-F(s)}{2} = f\left(\frac{s+t}{2}\right) f\left(\frac{s-t}{2}\right) = 0$$

は成立する。以下 $s \neq t$ として考える。②に $x=s, y=\frac{t-s}{n}$ を代入すると

$$f\left(\frac{t-s}{2n}\right) \sum_{k=0}^n f\left(s+\frac{k}{n}(t-s)\right) = f\left(\frac{s+t}{2}\right) f\left(\frac{n+1}{n} \cdot \frac{t-s}{2}\right) \quad \cdots \textcircled{5}$$

となる。ここで $t-s \neq 0$ より

$$(\textcircled{5} \text{の左辺}) = \frac{f\left(\frac{t-s}{2n}\right)}{\frac{t-s}{2n}} \cdot \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n f\left(s+\frac{k}{n}(t-s)\right) \cdot \frac{t-s}{n}$$

である。このとき $n \rightarrow \infty$ で $\frac{t-s}{2n} \rightarrow 0$ より、 $f(0)=0$ に注意して

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f\left(\frac{t-s}{2n}\right)}{\frac{t-s}{2n}} &= \lim_{\frac{t-s}{2n} \rightarrow 0} \frac{f\left(\frac{t-s}{2n}\right) - f(0)}{\frac{t-s}{2n}} \\ &= f'(0) \\ &= 1 \end{aligned}$$

となる。また、区分求積法により

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n f\left(s+\frac{k}{n}(t-s)\right) \cdot \frac{t-s}{n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{k=1}^n f\left(s+\frac{k}{n}(t-s)\right) \cdot \frac{t-s}{n} + f(s) \cdot \frac{t-s}{n} \right\} \\ &= \int_s^t f(x) dx + 0 \\ &= F(t) - F(s) \end{aligned}$$

となる。さらに、 $f(x)$ は連続であるから

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{s+t}{2}\right) f\left(\frac{n+1}{n} \cdot \frac{t-s}{2}\right) &= f\left(\frac{s+t}{2}\right) f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n} \cdot \frac{t-s}{2}\right)\right) \\ &= f\left(\frac{s+t}{2}\right) f\left(\frac{t-s}{2}\right) \end{aligned}$$

となる。したがって、⑤の両辺で $n \rightarrow \infty$ と極限をとるとき

$$\frac{F(t)-F(s)}{2} = f\left(\frac{s+t}{2}\right) f\left(\frac{t-s}{2}\right)$$

が成立する。以上より、すべての実数 s, t に対して

$$\frac{F(t)-F(s)}{2} = f\left(\frac{s+t}{2}\right) f\left(\frac{t-s}{2}\right)$$

が成立する。

(証明終)

$P(A) = P_A, P(B) = P_B$ と表す。 A, B は空でない事象なので、 $P_A \neq 0, P_B \neq 0$ である。

まず、 $p \Rightarrow q$ を示す。 A, B が独立であるならば

$$P(A \cap B) = P_A P_B$$

$$P(A \cap \bar{B}) = P_A (1 - P_B)$$

$$P(\bar{A} \cap B) = (1 - P_A) P_B$$

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = (1 - P_A)(1 - P_B)$$

となる。ゆえに $Q(P_A P_B, P_A (1 - P_B)), R((1 - P_A) P_B, (1 - P_A)(1 - P_B))$ となるため

$$\overrightarrow{OR} = \frac{1 - P_A}{P_A} \overrightarrow{OQ}$$

と表される。よって O, Q, R は同一直線上にあるので、 $p \Rightarrow q$ は成立する。

次に、 $q \Rightarrow p$ を示す。 O, Q, R が同一直線上にあるならば、実数 k を用いて

$$\overrightarrow{OR} = k \overrightarrow{OQ}$$

と表すことができる。ゆえに

$$\begin{cases} P(\bar{A} \cap B) = k \cdot P(A \cap B) & \dots \textcircled{1} \\ P(\bar{A} \cap \bar{B}) = k \cdot P(A \cap \bar{B}) & \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

となる。①、②を辺々足すことで

$$P(\bar{A}) = k \cdot P(A)$$

$$\Leftrightarrow 1 - P_A = k P_A$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{1 - P_A}{P_A} (\because P_A \neq 0)$$

となる。ここで

$$P(\bar{A} \cap B) + P(A \cap B) = P(B)$$

$$\Leftrightarrow (k + 1) \cdot P(A \cap B) = P_B$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{P_A} \cdot P(A \cap B) = P_B$$

$$\therefore P(A \cap B) = P_A P_B$$

が得られる。したがって A, B は独立であるため、 $q \Rightarrow p$ は成立する。以上より $p \Leftrightarrow q$ が成立するため、2つの条件 p, q は同値である。