

平成 31 年 度

数 学

注意事項

1. 問題は 4 題で、すべて必答問題です。
2. 解答はすべて別紙(解答用紙 4 枚)の該当する欄に記入しなさい。
3. 解答用紙の裏面を使用する場合は、表面の右下に「裏面に続く」と記入し、表面の下の部分を持って上にめくり記入しなさい。表面とは書く方向が反対になります。
4. 図やグラフは解答の中で重要な位置をしめます。その特徴をおさえて、ていねいに描きなさい。
5. 解答者がたどる道筋や問題解決に至る要点を明確に意識して、論述式的答案を読みやすく書きなさい。
6. 問題用紙の余白は、下書きやミスがないかどうか見直すのに十分活用しなさい。

1 以下の問いに答えよ。

(1) n を 3 以上の整数, x を正の実数とする。このとき

(a) 不等式

$$(1+x)^n > 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2$$

を証明せよ。

(b) 極限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{(1+x)^n}$$

の収束, 発散を調べ, 収束するときにはその値を求めよ。

(2) 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = 1, \quad 3a_{n+1} = a_n + \frac{1}{2^{n+1}} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定義する。

(a) $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(b) 上で求めた a_n に対して, 無限級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} na_n$$

の収束, 発散を調べ, 収束するときにはその和を求めよ。

2 以下の問いに答えよ。

(1) $x > 0$ のとき, 不等式 $x > \sin x$ を証明せよ。

(2) 不等式

$$\frac{1}{6} < \sin 10^\circ < \frac{\pi}{18}$$

を証明せよ。

3 関数 $f(x)$ はすべての実数 a, b, c に対して

$$f(a)f(b-c) + f(b)f(c-a) + f(c)f(a-b) = 0$$

を満たすものと仮定する。このとき、以下の問いに答えよ。

(1) すべての実数 x に対して $f(-x) = -f(x)$ が成立することを証明せよ。

(2) 0 以上のすべての整数 n 、および、すべての実数 x, y に対して

$$f\left(\frac{y}{2}\right) \sum_{k=0}^n f(x + ky) = f\left(x + \frac{n}{2}y\right) f\left(\frac{n+1}{2}y\right)$$

が成立することを証明せよ。

(3) $f(x)$ はすべての実数 x で連続かつ $x = 0$ で微分可能で $f'(0) = 1$ と仮定する。 $f(x)$ の原始関数の 1 つを $F(x)$ とすれば、すべての実数 s, t に対して

$$\frac{F(t) - F(s)}{2} = f\left(\frac{s+t}{2}\right) f\left(\frac{t-s}{2}\right)$$

が成立することを証明せよ。

4 A, B を空でない事象とする。このとき、以下の 2 つの条件 p, q が同値であることを証明せよ。

$p : A, B$ は独立である。

$q : \text{点 } O(0, 0), \text{点 } Q(P(A \cap B), P(A \cap \bar{B})), \text{点 } R(P(\bar{A} \cap B), P(\bar{A} \cap \bar{B}))$
は同一直線上にある。ただし、 $P(A)$ は事象 A が起こる確率を表すものとする。

