

平成10年度入学試験問題

数 学

数 学 II

注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけない。
2. 本冊子には、① から ⑧ までの8問題が印刷されていて、合計5ページである。
落丁、乱丁、印刷の不鮮明な箇所がある場合には、申し出ること。
3. 解答用紙は、別に印刷されている。解答は、問題と同じ番号の解答用紙に記入すること。なお、解答用紙の裏面に記入してはいけない。
4. 人文学部経済学科受験者のうち、数学IIを選択したものは、②、⑥、⑦、⑧のみ解答すること。
5. 教育学部小学校教員養成課程受験者は、②、⑤、⑦のみ解答すること。
6. 教育学部中学校教員養成課程技術科専攻課程受験者は、②、③、⑤、⑦のみ解答すること。
7. 教育学部養護学校教員養成課程受験者のうち、数学IIを選択したものは、③、⑤、⑦のみ解答すること。
8. 教育学部特別教科（看護）教員養成課程受験者は、②、③、⑤、⑧のみ解答すること。
9. 理工学部地球環境学科受験者は、①、④、⑤、⑧のみ解答すること。
10. 農学生命科学部生物機能科学科受験者のうち、数学IIを選択したものは、①、④、⑥、⑧のみ解答すること。
11. 農学生命科学部地域環境科学科受験者は、①、③、⑥、⑧のみ解答すること。
12. ①、②は(A)、(B)の2題に分かれている。新教育課程履修者は(A)のみ、旧教育課程履修者は(A)、(B)のどちらかひとつのみを解答すること。この指示に反したときは採点されない。
13. 解答用紙の指定された欄に、学部名及び受験番号を記入すること。
14. 計算などは、問題冊子の余白または計算用紙を利用すること。
15. 配布された解答用紙は持ち帰らないこと。
16. 配布された問題冊子、計算用紙は持ち帰ること。

新教育課程履修者は(A)のみ、旧教育課程履修者は(A)、(B)のどちらかひとつのみを解答せよ。この指示に反したときは、採点されない。旧教育課程履修者は、解答用紙の所定の欄で、選んだ問題の記号に丸をつけよ。

(A) 点Aの座標を $(5, 0)$ 、点Bの座標を $(\frac{27}{2}, \frac{9\sqrt{3}}{2})$ 、原点をOとして、 $OC:AC = 3:2$ を満たす動点をCとする。

- (1) 点Cの軌跡を求めよ。
- (2) 点Cが点Oと点Bから等距離にあるとき、点Cの座標を求めよ。
- (3) 三角形OBCの面積の最大値を求めよ。

(B) 数列 $a_0, a_1, a_2, \dots$ と2次関数の列 $f_1(x), f_2(x), f_3(x), \dots$ は、 $n = 1, 2, 3, \dots$ について次の4条件を満たすとする。

- (i) $a_0 = 1, a_1 = 2$
- (ii) $f_n(x)$ は $x = a_{n-1}$ で極小値 a_n をとる。
- (iii) $x = 0$ における $f_n(x)$ の微分係数は -2 である。
- (iv) $a_{n+1} = \frac{1}{2}f_n(0)$

このとき、次の問に答えよ。

- (1) 2次関数 $f_n(x)$ を a_{n-1}, a_n で表せ。
- (2) 一般項 a_n を求めよ。

新教育課程履修者は(A)のみ、旧教育課程履修者は(A)、(B)のどちらかひとつのみを解答せよ。この指示に反したときは、採点されない。旧教育課程履修者は、解答用紙の所定の欄で、選んだ問題の記号に丸をつけよ。

(A) 直交座標上の2点 $A(5, 0)$ 、 $B(0, 3)$ を通る直線を l とし、 l 上の動点 P の座標を $(x, f(x))$ とする。

(1) $f(x)$ を x の式で表せ。

(2) 原点を O とするとき、線分 OP の長さの2乗 OP^2 の最小値を求めよ。

(3) (2)の最小値をとるときの P の位置を P_0 とすると、 $OP_0 \perp l$ であることを示せ。

(4) 線分 OP_0 の長さの求め方はいろいろな方法が考えられる。上の方法と異なる求め方を3通り示せ。

(B) 次の問に答えよ。

(1) すべての自然数 n について $n(n+1)(n+2)$ は6の倍数である。このことを、 n を6で割った余りによる場合分けをして証明せよ。

(2) すべての自然数 n について $n(n+1)(n+2)(3n+5)$ を割り切る一定の整数のうち、最大のものは何か予想せよ。

(3) (2)で予想した数が本当に、すべての自然数 n について $n(n+1)(n+2)(3n+5)$ を割り切ることを、数学的帰納法を用いて証明せよ。

3 $AB = AC = 3$, $BC = 2$ である二等辺三角形 ABC で, $\angle BAC = \theta$ とする。

このとき $\sin \theta$ の値を次の 2 通りの方法で求めよ。

- (1) $\sin \frac{\theta}{2}$, $\cos \frac{\theta}{2}$ の値を求め, 2 倍角の公式を利用する。
- (2) 頂点 C から対辺 AB に垂線 CH をひき, 直角三角形 AHC を利用する。

4 $f(\theta) = (\sin \theta - \cos \theta)(\sqrt{3} \sin \theta - \cos \theta)$ とする。

- (1) $f(\theta) = 2\sqrt{2} \sin(\theta - 45^\circ) \sin(\theta - 30^\circ)$ を示せ。
- (2) $f(\theta) \leq 0$ となる θ の範囲を求めよ。ただし $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ とする。
- (3) (2) で求めた θ の範囲において, 関数 $\sin 12\theta + \cos 12\theta$ がとる最大値, 最小値と, そのときの θ の値を求めよ。

5

星や太陽、惑星などの等級は、肉眼で見える最も明るい星を1等星、最も暗い星を6等星とし、等級が1あがる（数値が1小さくなる）ごとに同じ倍率で明るさが増すように決められている。

- (1) 1等星の明るさは6等星のおよそ100倍にあたる。5等星の明るさは6等星のおよそ何倍か。小数第2位まで求めよ。
- (2) 太陽の明るさは1等星のおよそ 1.25×10^{11} 倍である。また月の最も明るいときの等級は太陽の等級とおよそ14の差がある。月の最も明るいときの明るさは1等星のおよそ何倍か。
- (3) 1等星の明るさが y 等星の x 倍であるとき、 y を x を用いた式で表せ。
下の表は計算に利用せよ。

x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
10^x	1.25	1.58	1.99	2.51	3.16	3.98	5.01	6.30	7.94

6

次の数を小さい順にならべよ。

$$24^{60}, 300^{32}, 3200^{24}, 36000^{18}$$

(近似値 $\log_{10} 2 = 0.3010$, $\log_{10} 3 = 0.4771$ を利用せよ。)

- 7** 放物線 $y = ax^2 + bx + c$ は点 $(1, 3)$, $(3, 5)$ を通り、これらの点での接線が互いに直交する。係数 a , b , c の値を求めよ。

- 8** 2 次関数 $f(x)$ は、次の 2 条件を満たしている。

- (i) $x > 0$ のとき、 $\int_0^x f(t) dt = \frac{x^2}{6} (f'(x) - 4)$
(ii) $f(x)$ は $0 \leq x \leq 2$ において最小値 $-\frac{8}{5}$ をとる。

このとき次の問に答えよ。

- (1) $f(x)$ を求めて、そのグラフの概形を描け。
(2) 放物線 $y = f(x)$ の $0 \leq x \leq 2$ の部分、直線 $x = 2$ および x 軸が囲む図形の面積を求めよ。