

6 正の数 a に対して、曲線 $y = \frac{1}{x^2}$ 上の点 $(a, \frac{1}{a^2})$ における接線が x 軸と交わる点の x 座標を $T(a)$ と書くことにする。数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = T(a_n) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定める。

3つの点 $(a_n, 0)$, $(a_n, \frac{1}{a_n^2})$, $(a_{n+1}, 0)$ を頂点とする三角形の面積を S_n とするとき、無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ の和を求めよ。

7

次の極限値を求めよ。

(1) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sin \sqrt{x+c} - \sin \sqrt{x})$ ただし, c は $c \neq 0$ をみたす定数である。

(2) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} \int_1^{x^2} \frac{dt}{\sqrt{1+t}}$

8

2つの曲線 $y = x^2 - x + c$ と $y = 3 \log x$ はともにある点 P を通り, しかも点 P において共通の接線をもつとする。このとき, 定数 c の値と接線の方程式を求めよ。

9 $f(x) = (x^2 + bx + c)e^x$ とする。ただし、 e は自然対数の底である。次の問いに答えよ。

(1) 不定積分 $\int f(x) dx$ を求めよ。

(2) 2 次方程式 $x^2 + bx + c = 0$ の解が、 $\log a$ と $\log(a + 2)$ であるとする。

このとき、連立不等式

$$\begin{cases} y \geq f(x) \\ y \leq 0 \end{cases}$$

の表す領域の面積を a を用いて表せ。

10 x がすべての実数の範囲を動くとき、関数 $f(x) = \int_{x^2}^{2x^2} te^{-t} dt$ の最大値と最小値を求めよ。ただし、 e は自然対数の底である。

11 曲線 $y = x^2 + \frac{1}{4}$ 上の点 $(a, a^2 + \frac{1}{4})$ における接線を l とする。ただし、 $a > 0$ である。次の問いに答えよ。

- (1) この曲線の接線で、 l に垂直なものを求めよ。
- (2) この曲線と l および (1) で求めた接線とで囲まれた部分を、 y 軸のまわりに 1 回転して得られる回転体の体積を求めよ。

12

次の問いに答えよ。

(1) $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 7 & -5 \end{pmatrix}$ のとき, A^n ($n = 2, 3, 4, \dots$) を求めよ。

(2) 2つの数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ を

$$a_1 = a, \quad a_{n+1} = 5a_n - 4b_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

$$b_1 = b, \quad b_{n+1} = 7a_n - 5b_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定める。

このとき, $a_{28} = 0$ かつ $b_{28} = 1$ となるように a と b の値を決定せよ。

13

双曲線 $x^2 - y^2 = 1$ の x 座標が正の部分を C とする。次の問いに答えよ。

- (1) 2点 $(-1, 0)$, $(0, t)$ を通る直線が C と交わるような t の値の範囲とその交点を求めよ。
- (2) 点 (x, y) が C 上を動くとき, $2x + y$ の最小値を求めよ。