1

(1)

真数条件より

$$x-1>0,\ x+1>0$$

$$\therefore x>1 \quad \cdot\cdot\cdot ①$$

でなければならない。与式を変形すると,

$$\log_2(x-1)-\log_4(x+1)\leqq 1$$

$$\Leftrightarrow \log_2(x-1)-\frac{\log_2(x+1)}{\log_2 4}\leqq 1$$

$$\Leftrightarrow \log_2(x-1)-\frac{\log_2(x+1)}{2}\leqq 1$$

$$\Leftrightarrow 2\log_2(x-1)-\log_2(x+1)\leqq 2$$

$$\Leftrightarrow \log_2\frac{(x-1)^2}{x+1}\leqq 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-1)^2}{x+1}\leqq 4$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2\leqq 4(x+1)\ (\because x+1>0)$$

$$\Leftrightarrow x^2-6x-3\leqq 0$$

$$\therefore 3-2\sqrt{3}\leqq x\leqq 3+2\sqrt{3} \quad \cdot\cdot\cdot ②$$

となる。したがって, ①, ②より

$$1<x\leqq 3+2\sqrt{3}$$

となる。

(答) $1<x\leqq 3+2\sqrt{3}$

(2)

$\sin x$ の正負によって場合分けを行う。

[1] $\sin x\geqq 0$, すなわち $0\leqq x\leqq \pi$ のとき

$$\sqrt{3}|\sin x|-\cos x=\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3}\sin x-\cos x=\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow 2\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{2}$$

$$\therefore \sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

となる。ここで, $0\leqq x\leqq \pi$ より $-\frac{\pi}{6}\leqq x-\frac{\pi}{6}\leqq \frac{5}{6}\pi$ であるから,

$$x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{4},\ \frac{3}{4}\pi$$

$$\therefore x=\frac{5}{12}\pi,\ \frac{11}{12}\pi$$

となる。

[2] $\sin x<0$, すなわち $\pi<x<2\pi$ のとき

$$\sqrt{3}|\sin x|-\cos x=\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{3}\sin x-\cos x=\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3}\sin x+\cos x=-\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow 2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=-\sqrt{2}$$

$$\therefore \sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

となる。ここで, $\pi<x<2\pi$ より $\frac{7}{6}\pi<x+\frac{\pi}{6}<\frac{13}{6}\pi$ であるから,

$$x+\frac{\pi}{6}=\frac{5}{4}\pi,\ \frac{7}{4}\pi$$

$$\therefore x=\frac{13}{12}\pi,\ \frac{19}{12}\pi$$

となる。

以上[1], [2]より, 求める解は

$$x=\frac{5}{12}\pi,\ \frac{11}{12}\pi,\ \frac{13}{12}\pi,\ \frac{19}{12}\pi$$

となる。

(答) $x=\frac{5}{12}\pi,\ \frac{11}{12}\pi,\ \frac{13}{12}\pi,\ \frac{19}{12}\pi$

2

$f(x)=\int_0^x (t^2+at+b)dt+c$ の両辺を x で微分すると

$$f'(x)=x^2+ax+b$$

となる。条件より，$f(x)$ は $x=-1, 2$ で極値をとることから，

$$f'(-1)=0,\ f'(2)=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1-a+b=0 \\ 4+2a+b=0 \end{cases}$$

$$\therefore a=-1,\ b=-2$$

となる。したがって，

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^x (t^2-t-2)dt+c \\ &= \left[\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}-2t\right]_0^x+c \\ &= \frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-2x+c \end{aligned}$$

となる。ここで

$$\begin{aligned} f(1) &= \frac{1}{3}-\frac{1}{2}-2+c \\ &= c-\frac{13}{6} \end{aligned}$$

である。また

$$f'(x)=x^2-x-2$$

より

$$f'(1)=-2$$

である。よって，曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(1,\ f(1))$ における接線は，点 $\left(1,\ c-\frac{13}{6}\right)$ を通り，傾きが -2 である直線となるから，その方程式は

$$y-\left(c-\frac{13}{6}\right)=-2(x-1)$$

となる。これが点 $(-1,\ 0)$ を通るので，

$$-\left(c-\frac{13}{6}\right)=-2\cdot(-2)$$

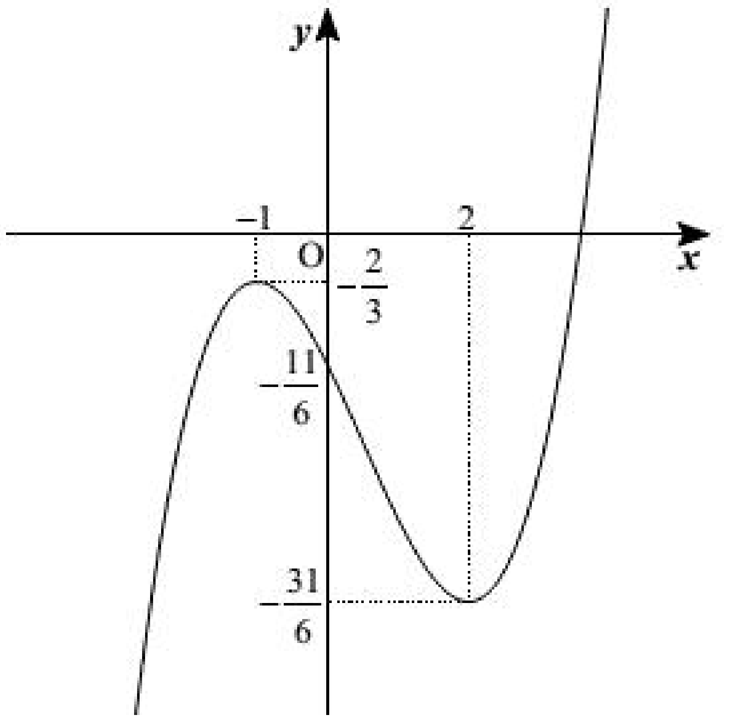
$$\therefore c=-\frac{11}{6}$$

となる。

また，$f(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-2x-\frac{11}{6}$ の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$-\frac{2}{3}$	$\searrow$	$-\frac{31}{6}$	$\nearrow$

よって，グラフは次のようになる。



(答) $a=-1,\ b=-2,\ c=-\frac{11}{6}$

グラフ：前図

3

1から1000までの整数の和は

$$\sum_{k=1}^{1000} k = \frac{1}{2}\cdot 1000\cdot(1000+1)$$
$$= 500500$$

となる。4で割り切れる自然数は，k を自然数として $4k$ と表すことができる。ここで

$$1 \leqq 4k \leqq 1000$$
$$\therefore 1 \leqq k \leqq 250$$

となることから，1から1000までの整数のうち，4で割り切れる数の和は

$$\sum_{k=1}^{250} 4k = 4\cdot\frac{1}{2}\cdot 250\cdot(250+1)$$
$$= 125500$$

となる。また，3で割って1余る自然数は，k を自然数として $3k-2$ と表すことができる。同様に，

$$1 \leqq 3k-2 \leqq 1000$$
$$\therefore 1 \leqq k \leqq 334$$

となることから，1から1000までの整数のうち，3で割って1余る数の和は

$$\sum_{k=1}^{334} (3k-2) = 3\cdot\frac{1}{2}\cdot 334\cdot(334+1) - 2\cdot 334$$
$$= 167167$$

となる。更に，4で割り切れ，3で割って1余る自然数について考える。4と3の最小公倍数は12であるから，12で割った余りについて考えればよい。1から12までの整数のうち，4で割り切れ，3で割って1余る数は4のみである。したがって，4で割り切れ，3で割って1余る自然数は，12で割って4余る自然数である。これらの数は，k を自然数として $12k-8$ と表すことができる。したがって，

$$1 \leqq 12k-8 \leqq 1000$$
$$\therefore 1 \leqq k \leqq 84$$

となることから，1から1000までの整数のうち，4で割り切れる数と3で割って1余る数の両方の和は，

$$\sum_{k=1}^{84} (12k-8) = 12\cdot\frac{1}{2}\cdot 84\cdot(84+1) - 8\cdot 84$$
$$= 42168$$

となる。以上より，求める数の和は，

$$500500 - 125500 - 167167 + 42168 = 250001$$

となる。

(答)　250001