4

実数$t(>0)$を用いて，$\mathrm{P}(t,t)$とする。直線APの方程式は，

$$y=\frac{t+4}{t-21}(x-21)-4$$

であるので，x軸との交点は，

$$x=\frac{4(t-21)}{t+4}+21 \qquad \cdots ①$$

となる。同様に，直線BPの方程式は，

$$y=\frac{t+2}{t-30}(x-30)-2$$

であるので，x軸との交点は，

$$x=\frac{2(t-30)}{t+2}+30 \qquad \cdots ②$$

となる。よって，①，②より直線APと，直線BPによってはさまれるx軸の部分の長さは，

$$\frac{2(t-30)}{t+2}+30-\frac{4(t-21)}{t+4}-21=4\left(\frac{25}{t+4}-\frac{16}{t+2}\right)+7 \cdots ③$$

となるので，

$$f(t)=\frac{25}{t+4}-\frac{16}{t+2}$$

とする。

$$\begin{aligned} f'(t)&=\frac{-25}{(t+4)^2}+\frac{16}{(t+2)^2} \\ &=\frac{-9t^2+28t+156}{(t+4)^2(t+2)^2} \\ &=-\frac{(9t+26)(t-6)}{(t+4)^2(t+2)^2} \end{aligned}$$

となるので，$f(t)$の増減表は以下のようになる。

x	0	$\cdots$	6	$\cdots$
$f'(t)$	／	+	0	−
$f(t)$	／	↗		↘

よって，$f(t)$の最大値は，③より，

$$4\times f(6)+7=9$$

である。

(答)最大値：9

5

$$
\begin{aligned}
&\int_0^1 (\cos \pi x - ax - b)^2\, dx \\
&= \int_0^1 \left(\cos^2 \pi x + a^2x^2 + b^2 - 2ax\cos \pi x + 2abx - 2b\cos \pi x\right) dx \\
&= \int_0^1 \left(\frac{1+\cos 2\pi x}{2} + a^2x^2 + b^2 + 2abx - 2b\cos \pi x\right) dx - 2a\int_0^1 x\cos \pi x dx \\
&= \left[\frac{\sin 2\pi x}{4\pi} + \frac{1}{3}a^2x^3 + \left(b^2 + \frac{1}{2}\right)x + abx^2 - \frac{2b}{\pi}\sin \pi x\right]_0^1 - 2a\left\{\left[\frac{x\sin \pi x}{\pi}\right]_0^1 - \frac{1}{\pi}\int_0^1 \sin \pi x dx\right\} \\
&= \frac{1}{3}a^2 + b^2 + \frac{1}{2} + ab - \frac{2a}{\pi^2}\left[\cos \pi x\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{3}a^2 + ab + \frac{4a}{\pi^2} + b^2 + \frac{1}{2} \\
&= \left(b + \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{1}{12}\left(a + \frac{24}{\pi^2}\right)^2 - \frac{48}{\pi^4} + \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

となるので，この値を最小にする a, b は，

$$
\begin{cases} b = -\dfrac{a}{2} \\ a = -\dfrac{24}{\pi^2} \end{cases}
\Leftrightarrow
\begin{cases} a = -\dfrac{24}{\pi^2} \\ b = \dfrac{12}{\pi^2} \end{cases}
$$

であり，このとき最小値は，

$$\frac{1}{2} - \frac{48}{\pi^4}$$

となる。

(答)最小値： $\dfrac{1}{2} - \dfrac{48}{\pi^4}$

$$
\begin{cases} a = -\dfrac{24}{\pi^2} \\ b = \dfrac{12}{\pi^2} \end{cases}
$$

$\boxed{6}$

(1)

$f(x)$ の x の 4 次の係数は1なので，題意より，ある実数 a, b を用いて，

$$f(x)-mx-n=\left(x^2+ax+b\right)^2$$

とする。この式を展開すると，

$$x^4+2x^3-3x^2+(1-m)x+1-n=x^4+2ax^3+\left(a^2+2b\right)x^2+2abx+b^2$$

となり，これは x の恒等式なので，

$$\begin{cases} 2=2a \\ -3=a^2+2b \\ 1-m=2ab \\ 1-n=b^2 \end{cases}$$

が成り立ち，これを連立すると，

$$\begin{cases} a=1 \\ b=-2 \\ m=5 \\ n=-3 \end{cases}$$

となる。

(答) $\begin{cases} m=5 \\ n=-3 \end{cases}$

(2)

$y=5x-3$ と $f(x)$ を連立すると，(1)より，

$$\left(x^2+x-2\right)^2=0$$
$$\Leftrightarrow \{(x+2)(x-1)\}^2=0$$
$$\Leftrightarrow x=-2, 1$$

となる。よって，求める面積は，

$$\begin{aligned} S&=\int_{-2}^{1}\{f(x)-(5x-3)\}dx \\ &=\int_{-2}^{1}\left(x^4+2x^3-3x^2-4x+4\right)dx \\ &=\left[\frac{1}{5}x^5+\frac{1}{2}x^4-x^3-2x^2+4x\right]_{-2}^{1} \\ &=\frac{81}{10} \end{aligned}$$

である。

(答) $\dfrac{81}{10}$

$\boxed{7}$

(1)

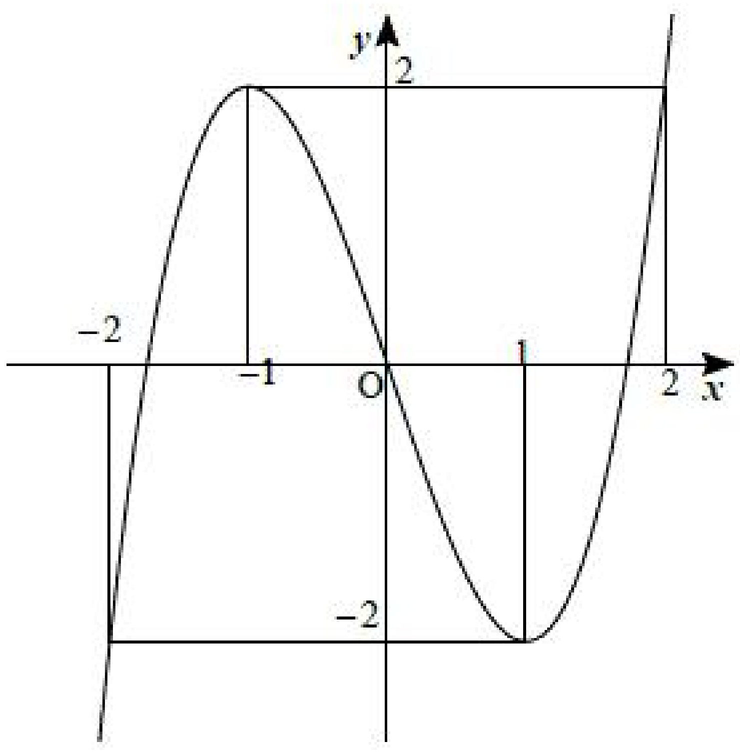
$f(x)=x^3-3x$ とすると，

$$f'(x)=3x^2-3$$
$$=3\left(x^2-1\right)$$

となるので，$y=f(x)$ の増減表は，以下のようになる。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗		↘		↗

よって，$y=f(x)$ のグラフは下図のようになる。



グラフより，$x^3-3x=t$ の解は，$y=f(x)$ と $y=t$ の解であることがわかる。よって，

$$f(\alpha)=f(\beta)$$
$$\Leftrightarrow \alpha^3-\beta^3-3(\alpha-\beta)=0$$
$$\Leftrightarrow (\alpha-\beta)\left(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2-3\right)=0$$

となる。

[1]　$\alpha=\beta$ のとき

グラフより，

$$\alpha=\beta=1$$

となる。

[2]　$\alpha\neq\beta$ のとき

$$\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2-3=0$$
$$\therefore \beta=\frac{-\alpha\pm\sqrt{12-3\alpha^2}}{2}$$

となるが，グラフより，$f(x)=t$ は3解(重解含む)を持ち，β は3解のうち中間の解なので，

$$\beta=\frac{-\alpha+\sqrt{12-3\alpha^2}}{2}$$

となる。これは，$\beta=\alpha=1$ もみたす。

以上，[1], [2]より，

$$\beta=\frac{-\alpha+\sqrt{12-3\alpha^2}}{2}$$

である。

(答)　$\beta=\dfrac{-\alpha+\sqrt{12-3\alpha^2}}{2}$

(2)

(1)より，

$$\frac{\beta}{\alpha}=\frac{-1+\sqrt{\dfrac{12}{\alpha^2}-3}}{2}$$

となる。また，

$$t=\alpha^3-3\alpha$$
$$\therefore \frac{dt}{d\alpha}=3\alpha^2-3$$

t	$-2\to 2$
α	$1\to 2$

である。よって，

$$\int_{-2}^{2}\frac{\beta}{\alpha}dt=\int_1^2\left(\frac{-1+\sqrt{\dfrac{12}{\alpha^2}-3}}{2}\right)\cdot\left(3\alpha^2-3\right)d\alpha$$
$$=\frac{3}{2}\int_1^2\left(-\alpha^2+1+\sqrt{3}\alpha\sqrt{4-\alpha^2}-\sqrt{\frac{12}{\alpha^2}-3}\right)d\alpha$$

となる。ここで，

$$\int_1^2\left(-\alpha^2+1+\sqrt{3}\alpha\sqrt{4-\alpha^2}\right)d\alpha=\left[-\frac{1}{3}\alpha^3+\alpha-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{2}{3}\left(4-\alpha^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]_1^2$$
$$=-\frac{8}{3}+2+\frac{1}{3}-1+3$$
$$=\frac{5}{3}\qquad\cdots①$$

である。また，$\alpha=2\sin\theta$ とすると，

$$\frac{d\alpha}{d\theta}=2\cos\theta$$

α	$1\to 2$
θ	$\dfrac{\pi}{6}\to\dfrac{\pi}{2}$

であるので，

$$\int_1^2\sqrt{\frac{12}{\alpha^2}-3}\,d\alpha=\sqrt{3}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{4-4\sin^2\theta}}{2\sin\theta}2\cos\theta d\theta$$
$$=\sqrt{3}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\cos^2\theta}{\sin\theta}d\theta$$
$$=2\sqrt{3}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{\sin\theta}-\sin\theta\right)d\theta$$
$$=2\sqrt{3}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}-\sin\theta\right)d\theta$$
$$=2\sqrt{3}\left\{\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{1-\cos\theta}+\frac{1}{1+\cos\theta}\right)\sin\theta d\theta+\left[\cos\theta\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\right\}$$
$$=2\sqrt{3}\log\left(2+\sqrt{3}\right)-3\qquad\cdots②$$

となる。よって，①と②より，

$$\int_{-2}^{2}\frac{\beta}{\alpha}dt=\frac{3}{2}\left\{\frac{5}{3}-2\sqrt{3}\log\left(2+\sqrt{3}\right)+3\right\}$$
$$=7-3\sqrt{3}\log\left(2+\sqrt{3}\right)$$

である。

(答)　$7-3\sqrt{3}\log\left(2+\sqrt{3}\right)$

8

(1)

$$AP=PB$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{10}\begin{pmatrix}9 & 1\\ 3 & 7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ x & y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ x & y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{10}\begin{pmatrix}9+x & 9+y\\ 3+7y & 3+7y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \alpha x & \beta y\end{pmatrix}$$

となるので，

$$\begin{cases}9+x=10\alpha & \cdots ①\\ 9+y=10\beta & \cdots ②\\ 3+7x=10\alpha x & \cdots ③\\ 3+7y=10\beta y & \cdots ④\end{cases}$$

となる。①，③より，

$$3+7x=x^2+9x$$
$$\Leftrightarrow (x+3)(x-1)=0$$
$$\therefore x=-3,1$$

となる。同様に②，④より，

$$y=-3,1$$

である。ここで，$x<y$ なので，

$$x=-3,\ y=1$$

となる。これを①と②に代入すると，

$$\begin{cases}\alpha=\dfrac{3}{5}\\ \beta=1\end{cases}$$

となる。よって，

$$\begin{cases}x=-3\\ y=1\\ \alpha=\dfrac{3}{5}\\ \beta=1\end{cases}$$

である。

(答) $\begin{cases}x=-3\\ y=1\\ \alpha=\dfrac{3}{5}\\ \beta=1\end{cases}$

(2)

(1)より，

$$P=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -3 & 1\end{pmatrix}$$
$$\therefore \det P=4$$

であるので，P は逆行列が存在し，それは，

$$P^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 3 & 1\end{pmatrix} \qquad \cdots ⑤$$

となる。また，(1)より，

$$P^{-1}AP=B$$
$$\Leftrightarrow P^{-1}A^nP=B^n$$
$$\therefore A^n=PB^nP^{-1}$$

であるので，⑤を代入すると，

$$A^n=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\left(\frac{3}{5}\right)^n & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 3 & 1\end{pmatrix}$$
$$=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}\left(\frac{3}{5}\right)^n+3 & -\left(\frac{3}{5}\right)^n+1\\ -3\left(\frac{3}{5}\right)^n+3 & 3\left(\frac{3}{5}\right)^n+1\end{pmatrix}$$

となり，

$$\lim_{n\to\infty}A^n=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}3 & 1\\ 3 & 1\end{pmatrix}$$

となる。よって，

$$\begin{cases}\lim\limits_{n\to\infty}a_n=6\\ \lim\limits_{n\to\infty}b_n=6\end{cases}$$

となる。

(答) $\begin{cases}\lim\limits_{n\to\infty}a_n=6\\ \lim\limits_{n\to\infty}b_n=6\end{cases}$

9

点Pを(x, y)とすると,

$$\begin{aligned}&BP-AP>2\\ \Leftrightarrow\ &\sqrt{(x-3)^2+y^2}-\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}>2\\ \Leftrightarrow\ &(x-3)^2+y^2>4+4\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}+(x-1)^2+(y-2)^2\\ \Leftrightarrow\ &-4x+4y>4\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}\\ \Leftrightarrow\ &y-x>\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2} \quad \cdots ①\end{aligned}$$

となり，ここで，右辺は正であるので，左辺も正となるので，$y>x$である。・・・②

よって，①は，

$$\begin{aligned}&(y-x)^2>(x-1)^2+(y-2)^2\\ \Leftrightarrow\ &4y-2xy>5-2x\\ \Leftrightarrow\ &2(2-x)y>5-2x \quad \cdots ③\end{aligned}$$

となるので，xの値で場合分けする。

[1]　$x=2$のとき

③の右辺は1となるので不適である。

[2]　$x>2$のとき

③は,

$$y<\frac{5-2x}{2(2-x)}=1+\frac{1}{4-2x}$$

となる。

[3]　$x<2$のとき

③は,

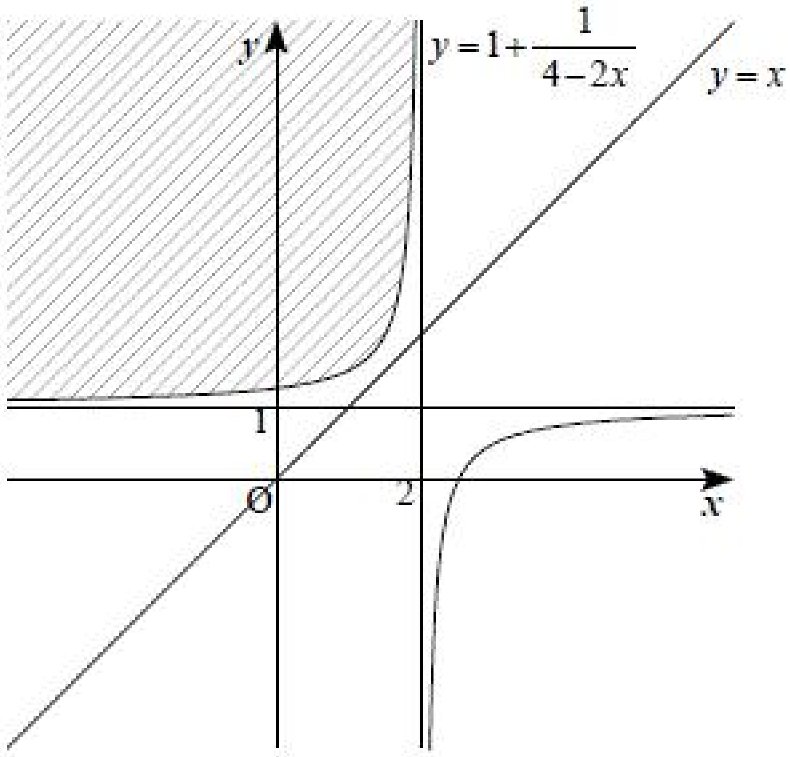
$$y>1+\frac{1}{4-2x}$$

となる。

以上, [1], [2], [3]と②より，求める範囲は,

$$x<2 \text{ かつ } y>1+\frac{1}{4-2x}$$

となり，図示すると以下のようになる。(境界は含まない。)



(答)前図

10

平行四辺形ABCDは原点対称の図形なので，求める2直線は，実数mを用いて，

$$\begin{cases} y = mx & \cdots① \\ y = -\dfrac{1}{m}x & \cdots② \end{cases}$$

とおける。ここで，$m=0$は成り立たないので，$m \neq 0$とする。また，図の対称性から$m>0$とし，平行四辺形ABCDの

$$\left.\begin{array}{l} y \geqq mx \\ y \geqq -\dfrac{1}{m}x \end{array}\right\} \cdots③$$

の部分だけを考えればよく，その面積は，

$$6 \times 10 \times \frac{1}{4} = 15 \qquad \cdots④$$

である。ここで，①がCDと交点を持つか，ADと交点を持つか，②がADと交点を持つか，ABと交点を持つかで場合分けする。

[1]　$0 < m < \dfrac{-3}{-6} \Leftrightarrow 0 < m < \dfrac{1}{2}$のとき

①とCDの交点をE，②とADとの交点をFとすれば，Eのx座標は，

$$mx = 3x - 15$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{15}{3-m}$$

となるので，$\mathrm{E}\left(\dfrac{15}{3-m}, \dfrac{15m}{3-m}\right)$である。また，Fの座標は，$(-3m, 3)$であるので，点$(5, 0)$をGとすれば③の部分の面積は，台形OGDFから三角形OGEの面積を引けばよい。よって，④より，

$$\frac{1}{2} \times (5 + 6 + 3m) \times 3 - \frac{1}{2} \times 5 \times \frac{15m}{3-m} = 15$$
$$\Leftrightarrow 3m^2 + 17m - 3 = 0$$
$$\therefore m = \frac{-17 \pm 5\sqrt{13}}{6}$$

となり，$0 < m < \dfrac{1}{2}$なので，

$$m = \frac{-17 + 5\sqrt{13}}{6}$$

となる。

[2]　$\dfrac{1}{2} \leqq m$かつ$-\dfrac{1}{m} \leqq -\dfrac{3}{4} \Leftrightarrow \dfrac{1}{2} \leqq m \leqq \dfrac{4}{3}$のとき

①とADの交点をE′とすると，その座標は$\left(\dfrac{3}{m}, 3\right)$となる。よって，③の部分の面積は，④より，

$$\frac{1}{2} \times \left(\frac{3}{m} + 3m\right) \times 3 = 15$$
$$\Leftrightarrow 3m^2 - 10m + 3 = 0$$
$$\Leftrightarrow (3m-1)(m-3) = 0$$
$$\therefore m = \frac{1}{3}, 3$$

となるが，$\dfrac{1}{2} \leqq m \leqq \dfrac{4}{3}$より不適である。

[3]　$m > \dfrac{4}{3}$のとき

②とABの交点をHとすると，そのx座標は，

$$-\frac{1}{m}x = 3x + 15$$
$$\Leftrightarrow x = -\frac{15m}{3m+1}$$

となる。よって，$\mathrm{H}\left(-\dfrac{15m}{3m+1}, \dfrac{15}{3m+1}\right)$であるので，③の部分の面積は，[1]のときと同様に考えると，

$$\frac{1}{2} \times \left(5 + 4 + \frac{3}{m}\right) \times 3 - \frac{1}{2} \times 5 \times \frac{15}{3m+1} = 15$$
$$\Leftrightarrow 3m^2 + 17m - 3 = 0$$
$$\therefore m = \frac{-17 \pm 5\sqrt{13}}{6}$$

となるが，$m > \dfrac{4}{3}$なので不適である。

以上，[1], [2], [3]より，求める2直線は，

$$\begin{cases} y = \dfrac{-17 + 5\sqrt{13}}{6}x \\ y = \dfrac{6}{17 - 5\sqrt{13}}x = -\dfrac{17 + 5\sqrt{13}}{6}x \end{cases}$$

である。

(答) $\begin{cases} y = \dfrac{-17 + 5\sqrt{13}}{6}x \\ y = -\dfrac{17 + 5\sqrt{13}}{6}x \end{cases}$