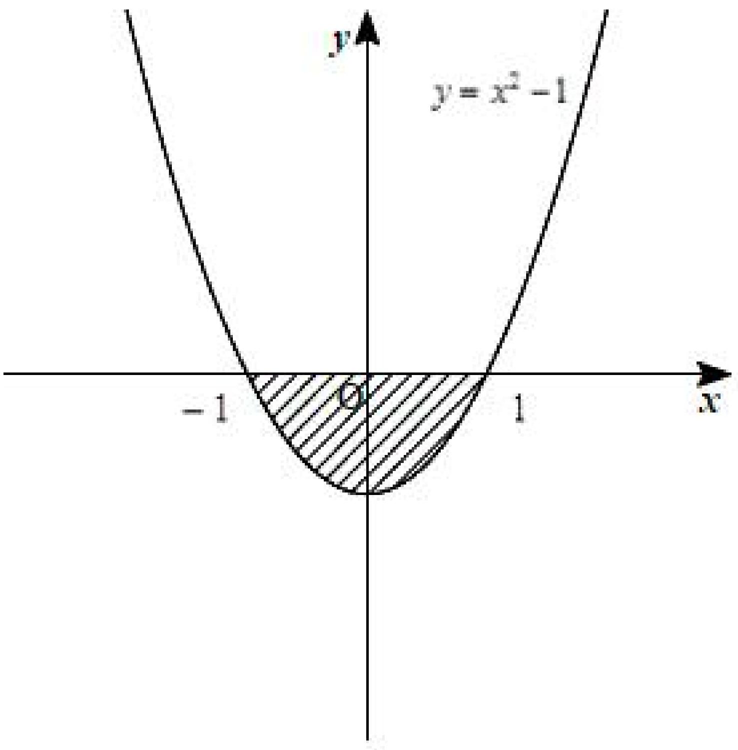
1

（1）

曲線 C_1 と x 軸の交点は

$$x^2-1=0$$
$$x=\pm 1$$

考える領域は，下図の斜線部のようになる。



以上より

$$S_1=-\int_{-1}^{1}(x^2-1)\,dx$$
$$=-\left[\frac{x^3}{3}-x\right]_{-1}^{1}$$
$$=\frac{4}{3}$$

となる。

答　$S_1=\frac{4}{3}$

（2）

$$\begin{cases} y=x^2-1 \\ y=a(x+1)^2 \end{cases}$$

の２式から y を消去して

$$x^2-1=a(x+1)^2$$
$$(a-1)x^2+2ax+a+1=0$$
$$\{(a-1)x+a+1\}(x+1)=0$$

これと，$a<0$ より $a-1\neq 0$。よって求める交点の x 座標は

$$\frac{1+a}{1-a},\ -1$$

である。これを $y=x^2-1$ に代入すると交点の座標は

$$(x,y)=\left(\frac{1+a}{1-a},\ \frac{4a}{(1-a)^2}\right),\ (-1,0)$$

となる。

答　$\left(\frac{1+a}{1-a},\ \frac{4a}{(1-a)^2}\right),\ (-1,0)$

（3）

$a<0$ より $\frac{1+a}{1-a}=-1+\frac{2}{1-a}>-1$

ここで $\alpha=-1$　$\beta=\frac{1+a}{1-a}$　とおいて，求める面積は

$$\int_{\alpha}^{\beta}\left\{a(x+1)^2-(x^2-1)\right\}dx=\int_{\alpha}^{\beta}(a-1)(x-\alpha)(x-\beta)\,dx$$
$$=(1-a)\,\frac{\{\alpha-\beta\}^3}{6}$$
$$=\frac{4}{3(1-a)^2}$$

これと(1)より，$S_1=\frac{1}{2}S_2$ のとき $\frac{4}{3(1-a)^2}=\frac{2}{3}$ である。

$$\frac{4}{3(1-a)^2}=\frac{2}{3}\Leftrightarrow 2=(1-a)^2$$
$$\Leftrightarrow a^2-2a-1=0$$
$$\Leftrightarrow a=1\pm\sqrt{2}$$

$a<0$ なので，$a=1-\sqrt{2}$

答　$a=1-\sqrt{2}$

$\boxed{2}$

（1）

まず，kを$1 \leqq k \leqq x$である整数として，$(1+x)^n$のx^kの係数は${}_nC_k$であり，$(1-x)^n$ のx^kの係数は$(-1)^k\,{}_nC_k$である。よって$(1+x)^n$と$(1-x)^n$のx^kの係数を比べると，kが奇数のとき同じ大きさで異符号，kが偶数のとき同じ大きさで同符号となる。ここで，$f(x)=(1+x)^n$とおく。

二項定理より

$$f(x)=(1+x)^n=1+{}_nC_1x+\cdots+{}_nC_{n-1}x^{n-1}+x^n$$

$$f(1)=(1+1)^n=1+{}_nC_1+\cdots+{}_nC_{n-1}+1$$

である。よって

$f(1)=$「$(1+x)^n$のすべての項の係数の和」

となる。また

$$f(-x)=(1-x)^n=1-{}_nC_1x+\cdots(-1)^{n-1}\,{}_nC_{n-1}x^{n-1}+(-1)^nx^n$$

$$f(-1)=(1-1)^n=1-{}_nC_1+{}_nC_3-{}_nC_5\cdots$$

であるので

$f(-1)=$「$(1+x)^n$の次数が偶数である項の係数の和」$-$「$(1+x)^n$の次数が奇数である項の係数の和」

である。以上より，次数が奇数である項の係数の和は

$$\frac{1}{2}\left(f(1)-f(-1)\right)=\frac{1}{2}\left(2^n-0\right)$$
$$=2^{n-1}$$

となる。

答　2^{n-1}

（2）

３人の手の出し方は$3^3=27$通り。Aだけが勝つような手の出し方はAがグーを出す，チョキを出す，パーを出す，の３通りなので，Aのみが勝つ確率は$\frac{3}{27}=\frac{1}{9}$である。

Aをあわせた２人が勝つ場合の数は，手の出し方が３通り，勝つ組み合わせの選び方がAとB，AとCの２通りなので，$2\cdot3=6$通りである。よって，Aをあわせた２人が勝つ確率は$\frac{6}{27}=\frac{2}{9}$である。

あいことなる場合の数は，全員が同じ手を出すとき３通り，全員が違う手を出すときは，グー，チョキ，パーを１列に並べる場合の数を考えて$3!=6$なので，あいこなる確率は$\frac{3+6}{27}=\frac{1}{3}$である。

以上より，Aが得るポイントの期待値は

$$\frac{1}{9}\cdot3+\frac{2}{9}\cdot2+\frac{1}{3}\cdot1=\frac{10}{9}$$

となる。

答　$\frac{10}{9}$

$\boxed{3}$

（1）

$\vec{p}=\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$とおく。

$$\vec{a}+\vec{p}=\begin{pmatrix} X \\ Y+1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a}-\vec{p}=\begin{pmatrix} -X \\ 1-Y \end{pmatrix}$$

$$\left(\vec{a}-\vec{p}\right)\left(\vec{a}+\vec{p}\right)=\begin{pmatrix} X \\ Y+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -X \\ 1-Y \end{pmatrix}$$
$$=-X^2+\left(1-Y^2\right)$$

これが0となるので求める図形の方程式は$X^2+Y^2=1$

以上よりPは中心$(0,0)$，半径1の円周上を動く。

答　中心$(0,0)$，半径1の円周上

（2）

$\vec{p}=\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$とおく。

$$\left|\vec{a}+\vec{p}\right|=\sqrt{X^2+(1+Y)^2}$$
$$\left|\vec{a}-\vec{p}\right|=\sqrt{(-X)^2+(1-Y)^2}$$

条件より$\left|\vec{a}+\vec{p}\right|=\left|\vec{a}-\vec{p}\right|$なので

$$\sqrt{X^2+(1+Y)^2}=\sqrt{(-X)^2+(1-Y)^2}$$
$$X^2+(1+Y)^2=(-X)^2+(1-Y)^2$$

$$\therefore Y=0$$

以上より，$Y=0$のときに条件を満たし，点Pは直線$y=0$上に存在する。

答　直線$y=0$

（3）

$\vec{p}=\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$とおく。

$\vec{a}\cdot\vec{p}=Y$であり，$\left|\vec{p}\right|=\sqrt{X^2+Y^2}$より，条件式は$\sqrt{2}Y=\sqrt{X^2+Y^2}$となる。

$$\sqrt{2}Y=\sqrt{X^2+Y^2}\Leftrightarrow 2Y^2=X^2+Y^2 \text{ かつ } Y\geqq 0$$

$$\Leftrightarrow Y=\pm X \text{ かつ } Y\geqq 0$$

以上より点Pは直線$y=\pm x$（$y\geqq 0$）上に存在する。

答　直線$y=\pm x$（$y\geqq 0$）