$\boxed{4}$

(1)

$f(x)=\log(2x+1)-x^2+1$ を両辺 x で微分すると，

$$f'(x)=\frac{2}{2x+1}-2x$$
$$=-\frac{2}{2x+1}(x+1)(2x-1)$$

であるから，増減表は下のようになる。

x	$\left(-\frac{1}{2}\right)$	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		$\nearrow$	$\log 2+\frac{3}{4}$	$\searrow$

よって，増減表より，$x=\frac{1}{2}$ のとき最大値 $\log 2+\frac{3}{4}$ をとる。

(答) $x=\frac{1}{2}$ のとき最大値 $\log 2+\frac{3}{4}$

(2)

$$\int_0^1 x^2(x-1)^2 e^{2x}dx=\int_0^1\left(x^4-2x^3+x^2\right)e^{2x}dx$$
$$=\left[\frac{1}{2}\left(x^4-2x^3+x^2\right)e^{2x}\right]_0^1-\int_0^1\left(2x^3-3x^2+x\right)e^{2x}dx$$
$$=-\left[\frac{1}{2}\left(2x^3-3x^2+x\right)e^{2x}\right]_0^1+\frac{1}{2}\int_0^1\left(6x^2-6x+1\right)e^{2x}dx$$
$$=\frac{1}{4}\left[\left(6x^2-6x+1\right)e^{2x}\right]_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1(6x-3)e^{2x}dx$$
$$=\frac{1}{4}e^2-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\left[(6x-3)e^{2x}\right]_0^1+\frac{3}{2}\int_0^1 e^{2x}dx$$
$$=\frac{e^2-7}{4}$$

である。

(答) $\frac{e^2-7}{4}$

5

(1)

$\angle CAB=\theta$ であるから，点Cの座標は $(1+\cos\theta, \sin\theta)$ であり，点Dの座標は $(1+\cos\theta, 0)$ である。ここで，$0<\theta<\pi$ より $1+\cos\theta\neq 0$ であるから，直線OCは,

$$y=\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}x$$

となる。直線OPは傾きが直線OCに垂直で，点Dを通るので,

$$y=-\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}\{x-(1+\cos\theta)\}$$

となる。点Pは直線OCと直線OPの交点であるから，その x 座標は

$$\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}x=-\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}\{x-(1+\cos\theta)\}$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{(1+\cos\theta)^2}{2}$$

となる。したがって点Pの座標は

$$\left(\frac{(1+\cos\theta)^2}{2}, \frac{\sin\theta(1+\cos\theta)}{2}\right)$$

である。

(答) $\left(\frac{(1+\cos\theta)^2}{2}, \frac{\sin\theta(1+\cos\theta)}{2}\right)$

(2)

$$\begin{aligned} r&=\sqrt{\frac{(1+\cos\theta)^4}{4}+\frac{\sin^2\theta(1+\cos\theta)^2}{4}} \\ &=\frac{1+\cos\theta}{2}\sqrt{(1+\cos\theta)^2+\sin^2\theta} \\ &=\frac{1}{\sqrt{2}}(1+\cos\theta)^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} r\,d\theta &=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}}\frac{1}{\sqrt{2}}(1+\cos\theta)^{\frac{3}{2}}\,d\theta \\ &=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}}\left(2\cos^2\frac{\theta}{2}\right)^{\frac{3}{2}}d\theta \\ &=2\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}}\cos^3\frac{\theta}{2}\,d\theta \\ &=2\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}}\cos\frac{\theta}{2}\left(1-\sin^2\frac{\theta}{2}\right)d\theta \\ &=2\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}}\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta-2\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}}\cos\frac{\theta}{2}\sin^2\frac{\theta}{2}\,d\theta \\ &=2\left[2\sin\frac{\theta}{2}-\frac{2}{3}\sin^3\frac{\theta}{2}\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \\ &=\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{11}{6} \end{aligned}$$

である。

(答) $\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{11}{6}$

$\boxed{6}$

(1)

$f(x)=x^3+3nx^2-(3n+2)$ とおく。両辺を x で微分すると，

$$f'(x)=3x^2+6nx$$
$$=3x(x+2n)$$

であり，増減表は $n>0$ より下のようになる。

x	$\cdots$	$-2n$	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$f(-2n)$	$\searrow$	$f(0)$	$\nearrow$

ここで，$n>0$ より

$$f(0)=-(3n+2)<0$$

である。よって，$x>0$ で $f(x)$ は単調増加であり，

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$$

であるから，$y=f(x)$ と x 軸の $x>0$ の部分との交点はただ一つのみである。よって，$f(x)=0$ の正の解はただ一つのみである。

(証明終)

(2)

$f(1)=-1, f(2)=9n+6>0$ より，3 次方程式の解 a_n は $1<a_n<2$ に存在し，$n>0$ より

$$a_n^{\ 3}+3na_n^{\ 2}-(3n+2)=0$$
$$\Leftrightarrow 3a_n^{\ 2}+\frac{a_n^{\ 3}}{n}-\left(3+\frac{2}{n}\right)=0$$
$$\Leftrightarrow a_n^{\ 2}=1+\frac{2}{3n}-\frac{a_n^{\ 3}}{3n}$$

である。よって，

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{\ 2}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{3n}-\frac{a_n^{\ 3}}{3n}\right)$$
$$=1$$

である。以上より，$a_n>0$ だから

$$\lim_{n\to\infty} a_n=1$$

である。

(答) $\lim_{n\to\infty} a_n=1$

$\boxed{7}$

$0<a<3$ より，$x=a$ での接線は，

$$y=(-2a+3)(x-a)-a^2+3a-1$$
$$=(-2a+3)x+a^2-1$$

であり，これを $y=g(x)$ とする。$y=f(x)$ と $y=g(x)$ の交点の x 座標を $\alpha, \beta\ (\alpha<\beta)$ とすると，

$$f(x)=g(x)$$
$$\Leftrightarrow x^2+(2a-6)x-a^2=0$$

となり，解と係数の関係より，

$$\begin{cases}\alpha+\beta=-2a+6\\ \alpha\beta=-a^2\end{cases}$$

である。求める面積を S とすると，

$$S=\int_\alpha^\beta\left\{(-2a+3)x+a^2-1-\left(x^2-3x-1\right)\right\}dx-\int_0^3\left\{\left(-x^2+3x-1\right)-\left(x^2-3x-1\right)\right\}dx$$
$$=-\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)dx+\int_0^3 2x(x-3)dx$$
$$=\frac{(\beta-\alpha)^3}{6}-\frac{(3-0)^3}{3}$$
$$=\frac{1}{6}\left\{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\right\}^{\frac{3}{2}}-9$$
$$=\frac{4}{3}\left(2a^2-6a+9\right)^{\frac{3}{2}}-9$$
$$=\frac{4}{3}\left\{2\left(a-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{9}{2}\right\}^{\frac{3}{2}}-9$$

である。ここで，$0<a<3$ であるから，

$$\frac{9}{2}\leqq 2\left(a-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{9}{2}<9$$

となるので，

$$\frac{4}{3}\left(\frac{9}{2}\right)^{\frac{3}{2}}-9\leqq S<\frac{4}{3}\cdot 9^{\frac{3}{2}}-9$$

$$\Leftrightarrow 9\left(\sqrt{2}-1\right)\leqq S<27$$

である。

(答) $9\left(\sqrt{2}-1\right)\leqq S<27$

8

(1)

行列$\mathrm{P}=\begin{pmatrix}2 & -5\\ -1 & 3\end{pmatrix}$には逆行列$\mathrm{P}^{-1}$が存在し，それは

$$\mathrm{P}^{-1}=\begin{pmatrix}3 & 5\\ 1 & 2\end{pmatrix}$$

であり，

$$\mathrm{PA}=\mathrm{BP}$$
$$\Leftrightarrow \mathrm{B}=\mathrm{PAP}^{-1}$$

であるから，

$$\mathrm{B}=\begin{pmatrix}2 & -5\\ -1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}24 & -66\\ 9 & -25\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 5\\ 1 & 2\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & -3\end{pmatrix}$$

である。

(答) $\mathrm{B}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & -3\end{pmatrix}$

(2)

$$\mathrm{B}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & -3\end{pmatrix}$$

$$\mathrm{B}^2=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & -3\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}4 & -1\\ 0 & 9\end{pmatrix}$$

$$\mathrm{B}^3=\begin{pmatrix}2^2 & -1\\ 0 & (-3)^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & -3\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}8 & 7\\ 0 & -27\end{pmatrix}$$

より，ある数列$\{b_n\}$を用いて，

$$\mathrm{B}^n=\begin{pmatrix}2^n & b_n\\ 0 & (-3)^n\end{pmatrix} \qquad \cdot\cdot\cdot ①$$

であることが推定出来る。これを数学的帰納法で証明する。

[1] $n=1$のとき

$$\mathrm{B}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & -3\end{pmatrix}$$

より，$b_1=1$とすれば①は成立する。

[2] $n=k$ (ただしkは自然数)で成り立つとき

このとき，

$$\mathrm{B}^{k+1}=\mathrm{B}^k\mathrm{B}$$
$$=\begin{pmatrix}2^k & b_k\\ 0 & (-3)^k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & -3\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}2^{k+1} & 2^k-3b_k\\ 0 & (-3)^{k+1}\end{pmatrix}$$

となり，$b_{k+1}=2^k-3b_k$とすれば①は成り立つ。

よって，[1], [2]より①が成り立つことは示せた。次に数列$\{b_n\}$の一般項を求める。数列$\{b_n\}$について，漸化式

$$b_{n+1}=2^n-3b_n$$

が成り立つから，両辺を2^{n+1}で割って

$$\frac{b_{n+1}}{2^{n+1}}=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\cdot\frac{b_n}{2^n}$$

となる。ここで，$c_n=\dfrac{b_n}{2^n}$とおくと，

$$c_1=\frac{b_1}{2}$$
$$=\frac{1}{2}$$

であり，

$$c_{n+1}=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}c_n$$
$$\Leftrightarrow c_{n+1}-\frac{1}{5}=-\frac{3}{2}\left(c_n-\frac{1}{5}\right)$$

であるから，

$$c_n-\frac{1}{5}=\left(-\frac{3}{2}\right)^{n-1}\left(c_1-\frac{1}{5}\right)$$
$$\Leftrightarrow c_n=-\frac{1}{5}\left(-\frac{3}{2}\right)^n+\frac{1}{5}$$

と求まる。よって，

$$b_n=2^nc_n$$
$$=\frac{1}{5}\left\{2^n-(-3)^n\right\}$$

である。従って，

$$\mathrm{B}^n=\begin{pmatrix}2^n & \frac{1}{5}\left\{2^n-(-3)^n\right\}\\ 0 & (-3)^n\end{pmatrix}$$

である。

(答) $\mathrm{B}^n=\begin{pmatrix}2^n & \frac{1}{5}\left\{2^n-(-3)^n\right\}\\ 0 & (-3)^n\end{pmatrix}$

(3)

$\mathrm{B}=\mathrm{PAP}^{-1}$の両辺を$n$乗して計算すると，

$$\mathrm{B}^n=\mathrm{PA}^n\mathrm{P}^{-1}$$
$$\Leftrightarrow \mathrm{A}^n=\mathrm{P}^{-1}\mathrm{B}^n\mathrm{P}$$
$$\Leftrightarrow \mathrm{A}^n=\begin{pmatrix}3 & 5\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2^n & \frac{1}{5}\left\{2^n-(-3)^n\right\}\\ 0 & (-3)^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -5\\ -1 & 3\end{pmatrix}$$
$$=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}27\cdot 2^n-22\cdot(-3)^n & -33\cdot 2^{n+1}-22\cdot(-3)^{n+1}\\ 9\cdot 2^n-(-3)^{n+2} & -11\cdot 2^{n+1}-(-3)^{n+3}\end{pmatrix}$$

である。

(答) $\mathrm{A}^n=\dfrac{1}{5}\begin{pmatrix}27\cdot 2^n-22\cdot(-3)^n & -33\cdot 2^{n+1}-22\cdot(-3)^{n+1}\\ 9\cdot 2^n-(-3)^{n+2} & -11\cdot 2^{n+1}-(-3)^{n+3}\end{pmatrix}$

9

(1)

$0<\theta<\pi$ として，直線 PR の方程式は，

$$y=\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}(x+1)$$

である。これは点 $Q(0,t)$ を通るので，

$$t=\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}$$

である。両辺二乗して，

$$\begin{aligned}t^2&=\frac{1-\cos^2\theta}{(1+\cos\theta)^2}\\&=\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}\end{aligned}$$

である。よって，

$$\cos\theta=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

である。$\sin\theta>0$ であるから，

$$\begin{aligned}\sin\theta&=\sqrt{1-\cos^2\theta}\\&=\frac{2t}{1+t^2}\end{aligned}$$

である。

(答) $\cos\theta=\frac{1-t^2}{1+t^2}$, $\sin\theta=\frac{2t}{1+t^2}$

(2)

直線 AQ は，

$$y=\frac{t}{3}(x+3)$$

であり，直線 BS は，

$$y=-\frac{1}{3t}(x-3)$$

であるので，この交点の x 座標を考えると，

$$\begin{aligned}&-t^2(x+3)=x-3\\&\Leftrightarrow x=3\frac{1-t^2}{1+t^2}\\&\Leftrightarrow x=3\cos\theta\end{aligned}$$

である。よって，y 座標は

$$\begin{aligned}y&=t(\cos\theta+1)\\&=\sin\theta\end{aligned}$$

である。以上より，$0<\theta<\pi$ であるから，点 T の描く図形は，楕円

$$\left(\frac{x}{3}\right)^2+y^2=1$$

の $y>0$ の部分である。

(答) 楕円 $\frac{x^2}{9}+y^2=1$ の $y>0$ の部分

10

放物線 $y=x^2$ について,

$$y'=2x$$

であるから，点Aにおける接線の方程式は,

$$y=2ax-a^2$$

であり，点Bにおける接線の方程式は,

$$y=2bx-b^2$$

である。交点Pを求めると,

$$\left(\frac{a+b}{2},\ ab\right)$$

である。よって,

$$\overrightarrow{\mathrm{PA}}=\begin{pmatrix}\frac{a-b}{2}\\ a(a-b)\end{pmatrix},\ \overrightarrow{\mathrm{PB}}=\begin{pmatrix}\frac{b-a}{2}\\ b(b-a)\end{pmatrix}$$

より,

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{2}\left|ab^2-ba^2\right|\\&=\frac{1}{2}|ab||b-a|\\T&=\frac{1}{2}\left|\frac{-b}{2}(b-a)^2+\frac{a}{2}(b-a)^2\right|\\&=\frac{1}{4}\left|(b-a)^3\right|\end{aligned}$$

である。よって

$$\begin{aligned}\frac{S}{T}&=\frac{2|ab||b-a|}{\left|(b-a)^3\right|}\\&=\frac{2|ab|}{(b-a)^2}\end{aligned}$$

である。ここで，$\angle\mathrm{AOB}$ が直角なので,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}&=ab(1+ab)\\&=0\end{aligned}$$

である。$a,b\neq 0$ より

$$ab=-1$$

である。

$$\begin{aligned}(b-a)^2&=a^2+b^2-2ab\\&=a^2+b^2+2\end{aligned}$$

であるから，$a,b\neq 0$ より $b=-\dfrac{1}{a}$ を代入すると,

$$(b-a)^2=a^2+\frac{1}{a^2}+2$$

である。よって,

$$\frac{S}{T}=\frac{2}{a^2+\frac{1}{a^2}+2}$$

となる。ここで，相加相乗平均の関係より,

$$a^2+\frac{1}{a^2}+2\geqq 2\sqrt{a^2\cdot\frac{1}{a^2}}+2=4\quad\left(\text{等号成立は，}a^2=\frac{1}{a^2}\Leftrightarrow a=\pm 1\text{のとき}\right)$$

である。以上より,

$$0<\frac{S}{T}\leqq\frac{1}{2}$$

となる。

(答) $0<\dfrac{S}{T}\leqq\dfrac{1}{2}$