

$$(1) \quad \sqrt{3} \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 2 \sin x + 1$$

加法定理を用いると

$$\sqrt{3} \left(\sin x \cdot \cos \frac{\pi}{6} + \cos x \cdot \sin \frac{\pi}{6} \right) = 2 \sin x + 1$$

$$\frac{3}{2} \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x = 2 \sin x + 1$$

$$\frac{1}{2} \sin x - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x = -1$$

$$\therefore \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = -1$$

である。 $0 \leq x < 2\pi$, すなわち $-\frac{\pi}{3} \leq x - \frac{\pi}{3} < \frac{5}{3}\pi$ であるから、

$$x - \frac{\pi}{3} = \frac{3}{2}\pi$$

$$\therefore x = \frac{11}{6}\pi$$

となる。

(答) $x = \frac{11}{6}\pi$

$$(2) \quad \log_4(2x^2 - xy) - \log_4(xy - 2y^2) = \log_2 x - \log_2 y \quad \cdots \textcircled{1}$$

真数条件より

$$2x^2 - xy > 0, xy - 2y^2 > 0, x > 0, y > 0 \quad \cdots \textcircled{2}$$

である。よって、 $\textcircled{1}$ は

$$\log_4 \frac{2x^2 - xy}{xy - 2y^2} = \log_2 \frac{x}{y}$$

$$\log_4 \frac{2\left(\frac{x}{y}\right)^2 - \frac{x}{y}}{\frac{x}{y} - 2} = \log_2 \frac{x}{y}$$

と書き換えられる。 $k = \frac{x}{y}$ とおくと

$$\log_4 \frac{2k^2 - k}{k - 2} = \log_2 k$$

$$\log_2 \frac{2k^2 - k}{k - 2} = 2 \log_2 k$$

$$\log_2 \frac{2k^2 - k}{k - 2} = \log_2 k^2$$

$$\frac{2k^2 - k}{k - 2} = k^2$$

$$2k^2 - k = k^2(k - 2)$$

$$k(k^2 - 4k + 1) = 0$$

$$\therefore k = 0, 2 \pm \sqrt{3}$$

ここで、 $\textcircled{2}$ 式を k を用いて表すと、 $x > 0, y > 0$ より

$$k(2k - 1) > 0, k - 2 > 0$$

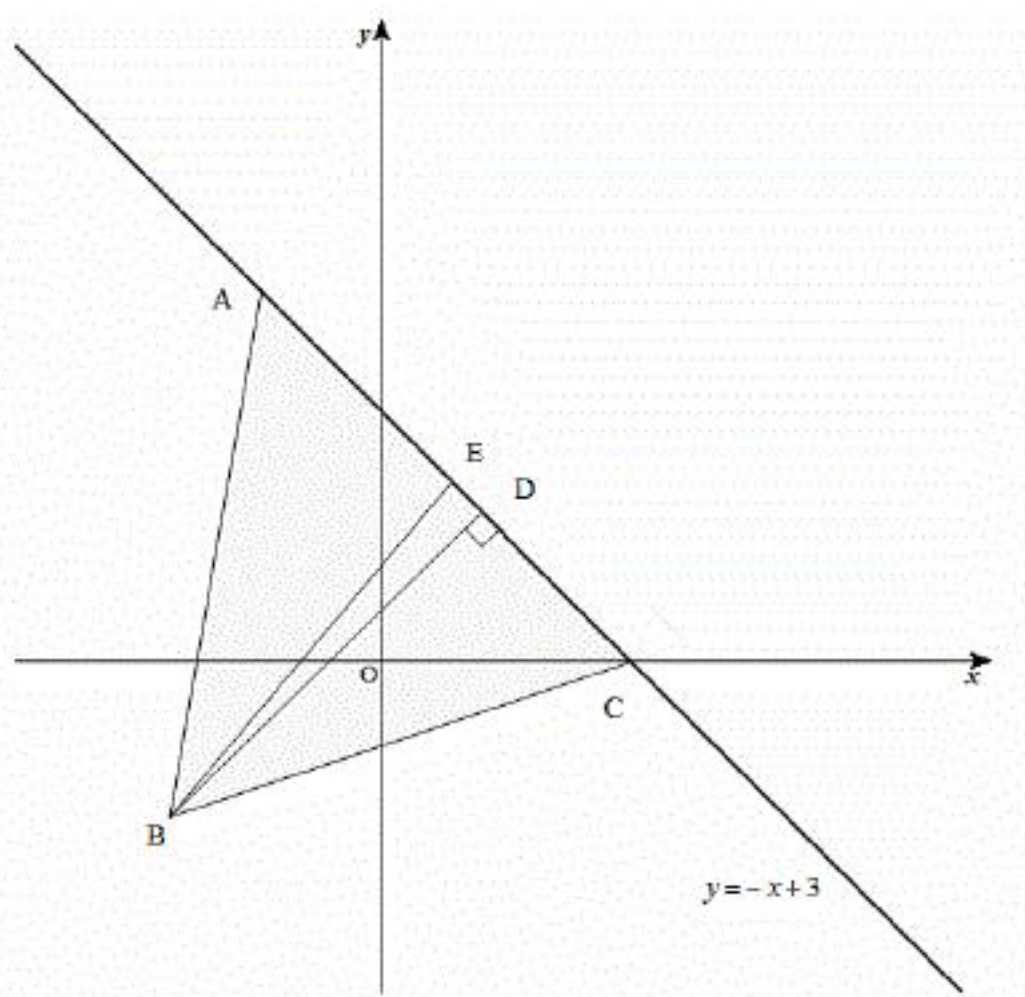
$$\therefore k > 2$$

よって $\textcircled{1}$ をみたす $\frac{x}{y} (=k)$ は

$$\frac{x}{y} = 2 + \sqrt{3}$$

である。

(答) $\frac{x}{y} = 2 + \sqrt{3}$



(1) 直線 AC の式は

$$y = \frac{0-5}{3-(-2)}(x-3)+0$$

$$\Leftrightarrow y = -x+3 \quad \cdots \textcircled{1}$$

これと直交する直線の傾きは 1 なので、直線 BD の式は

$$y = x+1 \quad \cdots \textcircled{2}$$

①, ②の交点が D なので、連立して解くと

$$x=1, y=2$$

が求まる。よって点 D の座標は (1, 2) である。

(答) (1, 2)

(2) 各点間の距離は

$$AB = \sqrt{\{(-2)-(-3)\}^2 + \{5-(-2)\}^2} = 5\sqrt{2}$$

$$BC = \sqrt{\{(-3)-3\}^2 + \{(-2)-0\}^2} = 2\sqrt{10}$$

である。線分 BE は $\angle ABC$ を二等分するので

$AE:EC = AB:BC = 5\sqrt{2}:2\sqrt{10} = \sqrt{5}:2$ である。よって、E の座標は

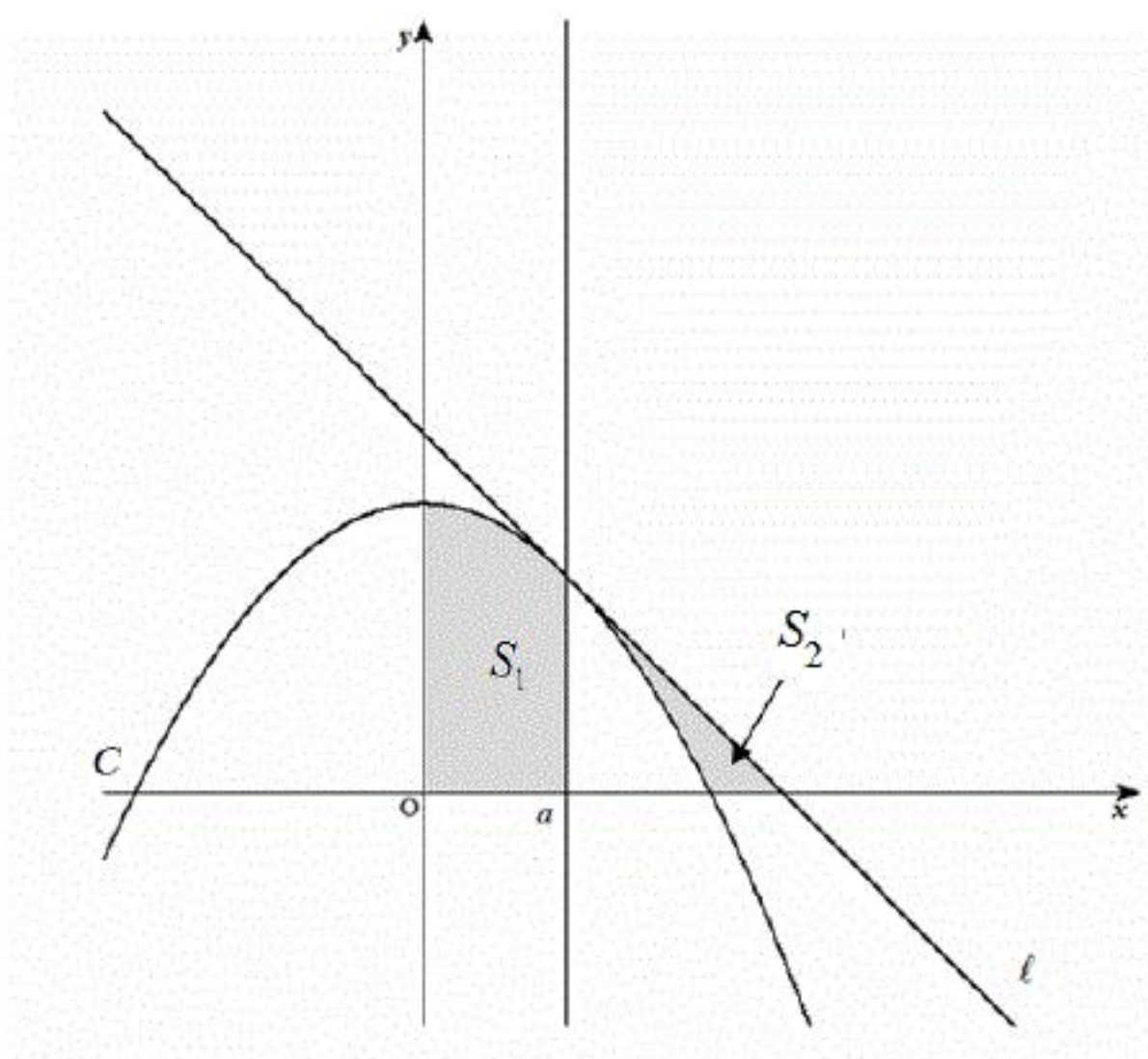
$$\left(\frac{\sqrt{5} \cdot 3 + 2 \cdot (-2)}{\sqrt{5} + 2}, \frac{\sqrt{5} \cdot 0 + 2 \cdot 5}{\sqrt{5} + 2} \right)$$

$$= \left(\frac{3\sqrt{5} - 4}{\sqrt{5} + 2}, \frac{10}{\sqrt{5} + 2} \right)$$

$$= (23 - 10\sqrt{5}, -20 + 10\sqrt{5})$$

となる。

(答) $(23 - 10\sqrt{5}, -20 + 10\sqrt{5})$



(1) C 上の点 $(a, 1-a^2)$ における接線の傾きは

$$y' = -2x$$

より, $-2a$ である。よって接線 ℓ の方程式は

$$\begin{aligned} y &= -2a(x-a) + 1-a^2 \\ &= -2ax + 1+a^2 \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad y = -2ax + 1 + a^2$$

(2) 接線 ℓ と x 軸との交点の y 座標は 0 なので

$$0 = -2ax + 1 + a^2$$

$$x = \frac{1+a^2}{2a} \quad (\because a \neq 0)$$

となり, 交点の座標は $\left(\frac{1+a^2}{2a}, 0\right)$ である。

$$(\text{答}) \quad \left(\frac{1+a^2}{2a}, 0\right)$$

$$(3) \quad S_1 = \int_0^a (1-x^2) dx$$

$$= \left[x - \frac{x^3}{3} \right]_0^a$$

$$= a - \frac{a^3}{3}$$

$$S_2 = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1+a^2}{2a} - a \right) \times (1-a^2) - \int_a^1 (1-x^2) dx$$

$$= \frac{1}{2} \times \left(\frac{1-a^2}{2a} \right) \times (1-a^2) - \left[x - \frac{x^3}{3} \right]_a^1$$

$$= \frac{(1-a^2)^2}{4a} - \left(\frac{2}{3} - a + \frac{a^3}{3} \right)$$

$$= -\frac{1}{12}a^3 + \frac{a}{2} + \frac{1}{4a} - \frac{2}{3}$$

$S_1 = 4S_2$ より

$$a - \frac{a^3}{3} = 4 \left(-\frac{1}{12}a^3 + \frac{a}{2} + \frac{1}{4a} - \frac{2}{3} \right)$$

$$a + \frac{1}{a} - \frac{8}{3} = 0$$

$$3a^2 - 8a + 3 = 0$$

$$\therefore a = \frac{4 \pm \sqrt{7}}{3}$$

ここで $0 < a < 1$ より

$$a = \frac{4 - \sqrt{7}}{3}$$

である。

$$(\text{答}) \quad a = \frac{4 - \sqrt{7}}{3}$$