

(1)

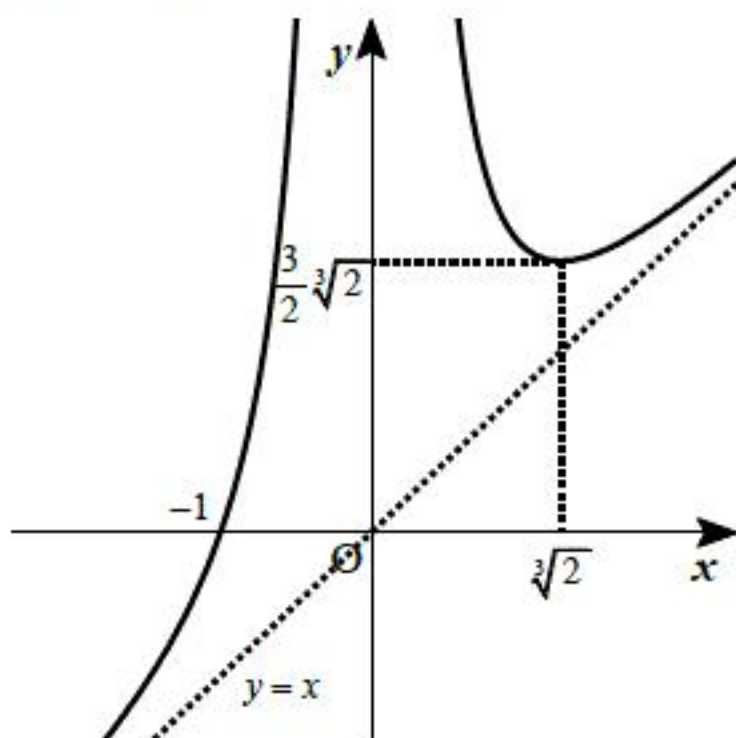
$y = x + \frac{1}{x^2}$ の両辺を x で微分すると,

$$\begin{aligned} y' &= 1 - \frac{2}{x^3} \\ &= \frac{x^3 - 2}{x^3} \\ &= \frac{(x - \sqrt[3]{2})(x^2 + \sqrt[3]{2}x + \sqrt[3]{4})}{x^3} \end{aligned}$$

であるから、次の増減表を得る。

x	...	0	...	$\sqrt[3]{2}$	...
y'	+	×	-	0	+
y	$\nearrow$	×	$\searrow$	$\frac{3}{2}\sqrt[3]{2}$	$\nearrow$

漸近線の一つは $x=0$ であり、また $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (y-x) = 0$ より $y=x$ も漸近線である。
よってグラフの概形を図示すると次のようになる。



(答) 前図

(2)

$x = \sqrt{3} \tan t$ とおく。 $\frac{dx}{dt} = \frac{\sqrt{3}}{\cos^2 t}$ であり,

x	0	$\rightarrow$	1
t	0	$\rightarrow$	$\frac{\pi}{6}$

だから,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dx}{(3+x^2)^2} &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{(3+3\tan^2 t)^2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\cos^2 t} dt \\ &= \frac{\sqrt{3}}{9} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\frac{1}{\cos^4 t}} \cdot \frac{1}{\cos^2 t} dt \quad \left(\because 1 + \tan^2 t = \frac{1}{\cos^2 t} \right) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{9} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 t \, dt \\ &= \frac{\sqrt{3}}{9} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt \\ &= \frac{\sqrt{3}}{18} \left[t + \frac{1}{2} \sin 2t \right]_0^{\frac{\pi}{6}} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{18} \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{4} \right) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{108} \pi + \frac{1}{24} \end{aligned}$$

(答) $\frac{\sqrt{3}}{108} \pi + \frac{1}{24}$

(1)

$x^2 - ax = x(x - a)$ だから、 a の値に注意して以下のように場合分けをする。

[i] $a < 0$ のとき

$$\begin{aligned}\int_0^1 |x^2 - ax| dx &= \int_0^1 (x^2 - ax) dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}ax^2 \right]_0^1 \\ &= -\frac{1}{2}a + \frac{1}{3}\end{aligned}$$

[ii] $0 \leq a < 1$ のとき

$$\begin{aligned}\int_0^1 |x^2 - ax| dx &= \int_0^a (-x^2 + ax) dx + \int_a^1 (x^2 - ax) dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}ax^2 \right]_0^a + \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}ax^2 \right]_a^1 \\ &= \frac{1}{3}a^3 - \frac{1}{2}a + \frac{1}{3}\end{aligned}$$

[iii] $1 \leq a$ のとき

$$\begin{aligned}\int_0^1 |x^2 - ax| dx &= \int_0^1 (-x^2 + ax) dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}ax^2 \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2}a - \frac{1}{3}\end{aligned}$$

$$(\text{答}) \quad \begin{cases} -\frac{1}{2}a + \frac{1}{3} & (a < 0) \\ \frac{1}{3}a^3 - \frac{1}{2}a + \frac{1}{3} & (0 \leq a < 1) \\ \frac{1}{2}a - \frac{1}{3} & (1 \leq a) \end{cases}$$

(2)

$\int_0^1 |x^2 - ax| dx = I(a)$ とおく。(1) の結果より、

$$I'(a) = \begin{cases} -\frac{1}{2} & (a < 0) \\ a^2 - \frac{1}{2} & (0 \leq a < 1) \\ \frac{1}{2} & (1 \leq a) \end{cases}$$

であるから、次の増減表を得る。

a	...	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	...
$I'(a)$	-	0	+
$I(a)$	$\searrow$		$\nearrow$

よって、 $I(a)$ が最小になるのは $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$ のときで、その値は

$$\begin{aligned}I\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{3} \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{6} + \frac{1}{3}\end{aligned}$$

$$(\text{答}) \quad -\frac{\sqrt{2}}{6} + \frac{1}{3} \quad \left(a = \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

$$\sin(x+y) - \sqrt{3} \cos(x+y) = 2 \sin\left(x+y - \frac{\pi}{3}\right)$$

であるから、

$$\sin(x+y) - \sqrt{3} \cos(x+y) \geq 1$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin\left(x+y - \frac{\pi}{3}\right) \geq 1$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(x+y - \frac{\pi}{3}\right) \geq \frac{1}{2} \quad \cdots(*)$$

$|x| \leq \pi, |y| \leq \pi$ の下では $-2\pi \leq x+y \leq 2\pi$ であるから、

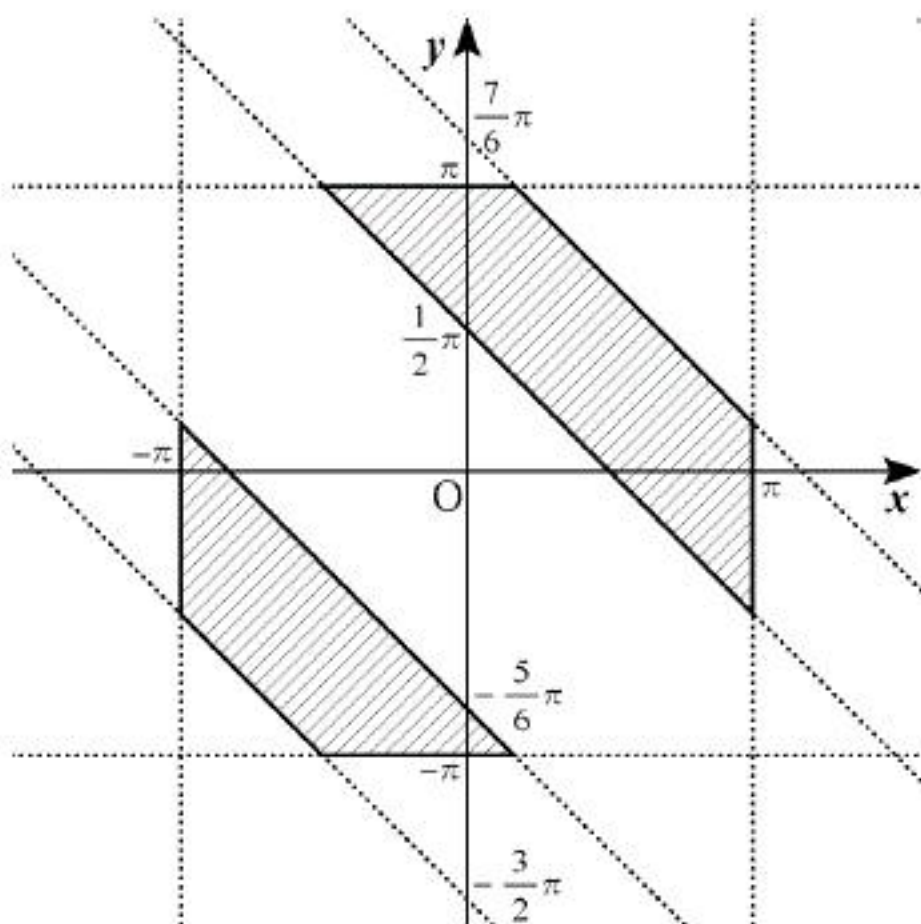
$$-\frac{7}{3}\pi \leq x+y - \frac{\pi}{3} \leq \frac{5}{3}\pi$$

である。よって、(*) を解くと

$$-\frac{11}{6}\pi \leq x+y - \frac{\pi}{3} \leq -\frac{7}{6}\pi, \frac{1}{6}\pi \leq x+y - \frac{\pi}{3} \leq \frac{5}{6}\pi$$

$$\therefore -\frac{3}{2}\pi \leq x+y \leq -\frac{5}{6}\pi, \frac{1}{2}\pi \leq x+y \leq \frac{7}{6}\pi$$

$|x| \leq \pi, |y| \leq \pi$ とあわせて図示すると次図斜線部となる。ただし境界含む。



(答)

(1)

$$\begin{aligned}
 a_k &= \int_0^\pi (\sin x - \cos kx)^2 dx \\
 &= \int_0^\pi (\sin^2 x - 2\sin x \cos kx + \cos^2 kx) dx \\
 &= \int_0^\pi \left\{ \frac{1 - \cos 2x}{2} - \sin(k+1)x + \sin(k-1)x + \frac{1 + \cos 2kx}{2} \right\} dx \quad \cdots (*)
 \end{aligned}$$

[i] $k \neq 1$ のとき,

$$\begin{aligned}
 (*) &= \left[\frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{2} \sin 2x \right) + \frac{1}{k+1} \cos(k+1)x \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{k-1} \cos(k-1)x + \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{2k} \sin 2kx \right) \right]_0^\pi \\
 &= \pi + \frac{1}{k+1} \cos(k+1)\pi - \frac{1}{k-1} \cos(k-1)\pi - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k-1} \\
 &= \pi + \frac{(-1)^{k+1}}{k+1} - \frac{(-1)^{k-1}}{k-1} - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k-1}
 \end{aligned}$$

よって,

 k が奇数のとき π k が偶数のとき $\pi + \frac{2}{k-1} - \frac{2}{k+1}$ [ii] $k=1$ のとき

$$\begin{aligned}
 (*) &= \int_0^\pi \left\{ \frac{1 - \cos 2x}{2} - \sin 2x + \frac{1 + \cos 2x}{2} \right\} dx \\
 &= \left[\frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{2} \sin 2x \right) + \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{2} \sin 2x \right) \right]_0^\pi \\
 &= \pi
 \end{aligned}$$

これは [i] の k が奇数のときに含まれる。 k が奇数のとき π (答) k が偶数のとき $\pi + \frac{2}{k-1} - \frac{2}{k+1}$

(2)

[i] n が奇数のとき, $n = 2m - 1$ とおくと

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^n a_k &= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{2m-1} \\
 &= (a_1 + a_3 + \cdots + a_{2m-1}) + (a_2 + a_4 + \cdots + a_{2m-2}) \\
 &= (\pi + \pi + \cdots + \pi) + \\
 &\quad \left\{ \left(\pi + 2 - \frac{2}{3} \right) + \left(\pi + \frac{2}{3} - \frac{2}{5} \right) + \cdots + \left(\pi + \frac{2}{2m-3} - \frac{2}{2m-1} \right) \right\} \\
 &= m\pi + \left\{ (m-1)\pi + 2 - \frac{2}{2m-1} \right\} \\
 &= (2m-1)\pi + 2 - \frac{2}{2m-1} \\
 &= n\pi + 2 \left(1 - \frac{1}{n} \right)
 \end{aligned}$$

[ii] n が偶数のとき, $n = 2m$ とおくと

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^n a_k &= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{2m-1} + a_{2m} \\
 &= (a_1 + a_3 + \cdots + a_{2m-1}) + (a_2 + a_4 + \cdots + a_{2m}) \\
 &= (\pi + \pi + \cdots + \pi) + \\
 &\quad \left\{ \left(\pi + 2 - \frac{2}{3} \right) + \left(\pi + \frac{2}{3} - \frac{2}{5} \right) + \cdots + \left(\pi + \frac{2}{2m-1} - \frac{2}{2m+1} \right) \right\} \\
 &= m\pi + \left(m\pi + 2 - \frac{2}{2m+1} \right) \\
 &= 2m\pi + 2 - \frac{2}{2m+1} \\
 &= n\pi + 2 \left(1 - \frac{1}{n+1} \right)
 \end{aligned}$$

 n が奇数のとき $n\pi + 2 \left(1 - \frac{1}{n} \right)$ (答) n が偶数のとき $n\pi + 2 \left(1 - \frac{1}{n+1} \right)$

「 $A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$ に対して $a_n > b_n > c_n > d_n > 0$ である」 $\cdots(*)$

を数学的帰納法で示す。

[i] $n=1$ のとき

仮定より $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ は $a > b > c > d > 0$ を満たす。

[ii] $n=k$ のとき $(*)$ が成り立つとすると

$$A^{k+1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_k & b_k \\ c_k & d_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_k & b_k \\ c_k & d_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

より

$$\begin{pmatrix} aa_k + bc_k & ab_k + bd_k \\ ca_k + dc_k & cb_k + dd_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa_k + cb_k & ba_k + db_k \\ ac_k + cd_k & bc_k + dd_k \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{cases} aa_k + bc_k = aa_k + cb_k (= a_{k+1}) \\ ab_k + bd_k = ba_k + db_k (= b_{k+1}) \\ ca_k + dc_k = ac_k + cd_k (= c_{k+1}) \\ cb_k + dd_k = bc_k + dd_k (= d_{k+1}) \end{cases} \quad \cdots(**)$$

ここで,

$$a_{k+1} - b_{k+1} = (aa_k + bc_k) - (ab_k + bd_k) = a(a_k - b_k) + b(c_k - d_k) > 0$$

$$\begin{aligned} b_{k+1} - c_{k+1} &= (ab_k + bd_k) - (ca_k + dc_k) = (ba_k + db_k) - (ca_k + dc_k) \quad (\because (**)) \\ &= (b - c)a_k + d(b_k - c_k) > 0 \end{aligned}$$

$$c_{k+1} - d_{k+1} = (ca_k + dc_k) - (cb_k + dd_k) = c(a_k - b_k) + d(c_k - d_k) > 0$$

$$d_{k+1} = cb_k + dd_k > 0$$

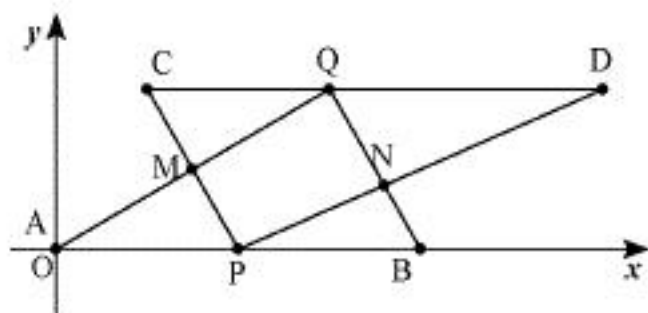
であるから $a_{k+1} > b_{k+1} > c_{k+1} > d_{k+1} > 0$ が成り立つので,

$(*)$ は $n=k+1$ でも成り立つ。

以上 [i], [ii] より, 題意は示された。

(証明終)

$P(s, 0), Q(t, 1) (0 \leq s \leq 4, 1 \leq t \leq 6)$
 とする。また、直線 CP, AQ の交点を M 、
 直線 QB, PD の交点を N とおく。
 題意の面積を $f(s, t)$ とする。



$\triangle QCM \sim \triangle APM, \triangle PBN \sim \triangle DQN$ を利用して、 $f(s, t)$ を求める。

[i] $s=0, t=1$ のとき

$$f(s, t) = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 1 \cdot \frac{5}{4+5} = \frac{10}{9}$$

[ii] $s=4, t=6$ のとき

$$[i] \text{と同様に, } f(s, t) = \frac{10}{9}$$

[iii] 上記以外るとき

$$\begin{aligned} f(s, t) &= \triangle ABQ - \triangle APM - \triangle PBN \\ &= \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot s \cdot \frac{s}{s+(t-1)} - \frac{1}{2} \cdot (4-s) \cdot \frac{4-s}{(4-s)+(6-t)} \\ &= 2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{s^2}{s+t-1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{(4-s)^2}{10-s-t} \end{aligned}$$

ここで、 s を固定して $f(s, t)$ を t の関数 $g(t)$ とみなす。

$$\begin{aligned} g'(t) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{s^2}{(s+t-1)^2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{(4-s)^2}{(10-s-t)^2} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{s}{s+t-1} + \frac{4-s}{10-s-t} \right) \left(\frac{s}{s+t-1} - \frac{4-s}{10-s-t} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{s}{s+t-1} + \frac{4-s}{10-s-t} \right) \cdot \frac{5s+4-4t}{(s+t-1)(10-s-t)} \end{aligned}$$

ここで $\frac{s}{s+t-1} + \frac{4-s}{10-s-t} > 0$ であるから、次の増減表を得る。

t	1	...	$\frac{5s+4}{4}$	...	6
$g'(t)$		+	0	-	
$g(t)$		$\nearrow$		$\searrow$	

$0 \leq s \leq 4$ より $1 \leq \frac{5s+4}{4} \leq 6$ であるから、 $g(t)$ は $t = \frac{5s+4}{4}$ のとき
 最大となる。(これは[i], [ii]の場合も含んでいる。)

$$\begin{aligned} g\left(\frac{5s+4}{4}\right) &= 2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{9} s - \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{9} \cdot (4-s) \\ &= \frac{10}{9} \end{aligned}$$

よって、 $g(t)$ の最大値は s の値によらず $\frac{10}{9}$

つまり、 $f(s, t)$ の最大値は $\frac{10}{9}$

(答) $\frac{10}{9}$

等比数列 $2, 4, 8, \dots$ の一般項は $a_n = 2^n$, $3, 9, 27, \dots$ の一般項は $b_n = 3^n$ である。
また,

$$A_n = \log_6 2^n = n \log_6 2$$

$$B_n = \log_6 3^n = n(1 - \log_6 2)$$

とおく。できた数列の第1000項目までに含まれる a_n の項, b_n の項のうち
最大のものを, それぞれ $2^i, 3^j$ とすると,

$$i + j = 1000 \quad \dots(*)$$

が成り立つ。そこで, $A_n < B_m$ かつ $n + m = 1000$ を満たす最小の m を求める。

$$A_n < B_m \Leftrightarrow n \log_6 2 < m(1 - \log_6 2)$$

$$\Leftrightarrow m > (n + m) \log_6 2$$

$$\therefore m > 1000 \times 0.386852 = 386.852$$

これを満たす最小の m は, $m = 387$ である。ここで,

$$B_{386} < 386(1 - 0.386852) = 236.675128$$

$$237.140276 = 613 \times 0.386852 < A_{613} < 613 \times 0.386853 = 237.140889$$

$$237.287889 = 387(1 - 0.386853) < B_{387} < 387(1 - 0.386852) = 237.288276$$

$$A_{614} > 614 \times 0.386852 = 237.527128$$

であるから, $B_{386} < A_{613} < B_{387} < A_{614}$, すなわち

$$3^{386} < 2^{613} < 3^{387} < 2^{614}$$

となる。 $(*)$ を考慮すると, 3^{387} が第1000項であることがわかる。

(答) $3, 9, 27, \dots$ の数列の第387項

(1)

$4n$ 枚のカードの中から 2 枚のカードを選ぶ取り出し方は ${}_{4n}C_2$ 通りある。

$X = k$ ($2 \leq k \leq n$) となる場合は

- ・ k のカードを 1 枚と k 未満のカードを 1 枚引く
- ・ k のカードを 2 枚引く

のときで、これらは互いに排反なので、 $X = k$ となる確率は

$$\begin{aligned} \frac{{}_4C_1 \cdot {}_{4(k-1)}C_1 + {}_4C_2}{{}_{4n}C_2} &= \frac{4 \cdot 4(k-1) + 6}{\frac{4n(4n-1)}{2}} \\ &= \frac{8k-5}{n(4n-1)} \quad \cdots (*) \end{aligned}$$

$k=1$ のときは 1 のカードを 2 枚引くときなので、

$$\begin{aligned} \frac{{}_4C_2}{{}_{4n}C_2} &= \frac{6}{\frac{4n(4n-1)}{2}} \\ &= \frac{3}{n(4n-1)} \end{aligned}$$

これは (*) で $k=1$ としたときに一致する。

$n=1$ のときは必ず $X=k=1$ で、この確率は 1 であるから、これは (*) で $n=1, k=1$ としたときに一致する。

よって $X = k$ となる確率は $\frac{8k-5}{n(4n-1)}$

$$(\text{答}) \quad \frac{8k-5}{n(4n-1)}$$

(2)

X の期待値は

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k \cdot \frac{8k-5}{n(4n-1)} &= \frac{1}{n(4n-1)} \sum_{k=1}^n (8k^2 - 5k) \\ &= \frac{1}{n(4n-1)} \left\{ 8 \cdot \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) - 5 \cdot \frac{1}{2} n(n+1) \right\} \\ &= \frac{(n+1)(16n-7)}{6(4n-1)} \end{aligned}$$

$$(\text{答}) \quad \frac{(n+1)(16n-7)}{6(4n-1)}$$