

1

(1)

与えられた方程式を変形すると、

$$\begin{aligned} & -\sin 2\theta \cos \theta + 2 \cos 2\theta + \sin \theta = 0 \\ & -2 \sin \theta \cos^2 \theta + 2(1 - 2 \sin^2 \theta) + \sin \theta = 0 \\ & -2 \sin \theta (1 - \sin^2 \theta) + 2 - 4 \sin^2 \theta + \sin \theta = 0 \\ & 2 \sin^3 \theta - 4 \sin^2 \theta - \sin \theta + 2 = 0 \\ & \therefore (\sin \theta - 2)(2 \sin^2 \theta - 1) = 0 \end{aligned}$$

である。ここで、 $0 \leq \theta \leq \pi$ のとき $0 \leq \sin \theta \leq 1$ なので、

$$\begin{aligned} \sin \theta &= \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \therefore \theta &= \frac{1}{4}\pi, \frac{3}{4}\pi \end{aligned}$$

となる。

(答) $\theta = \frac{1}{4}\pi, \frac{3}{4}\pi$

(2)

真数条件より、

$$「2 - x > 0 \text{ かつ } x + 1 > 0」 \Leftrightarrow -1 < x < 2$$

である必要がある。このとき、

$$\begin{aligned} y &= \log_2 (2 - x) + \log_{\sqrt{2}} (1 + x) \\ &= \log_2 (2 - x) + \frac{\log_2 (1 + x)}{\log_2 \sqrt{2}} \\ &= \log_2 (2 - x) + 2 \log_2 (1 + x) \\ &= \log_2 (2 - x)(1 + x)^2 \\ &= \log_2 (-x^3 + 3x + 2) \end{aligned}$$

である。

ここで、 $f(x) = -x^3 + 3x + 2$ とおくと、 y の増減と $f(x)$ の増減は一致する。

$$f'(x) = -3x^2 + 3 = -3(x + 1)(x - 1)$$

であるから、 $f(x)$ 及び y の増減表は次のようになる。

x	-1	...	1	...	2
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	0	↗	4	↘	0
y		↗	2	↘	

よって、増減表から $x = 1$ のとき y は最大値 2 をとる。

(答) 2

(1)

$$b_n = \frac{a_n - 3}{a_n + 1} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

より,

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= \frac{a_{n+1} - 3}{a_{n+1} + 1} \\ &= \frac{\frac{4a_n + 3}{a_n + 2} - 3}{\frac{4a_n + 3}{a_n + 2} + 1} \\ &= \frac{a_n - 3}{5a_n + 5} = \frac{1}{5} b_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \end{aligned}$$

$$(\text{答}) \quad b_{n+1} = \frac{1}{5} b_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

(2)

$$b_1 = \frac{a_1 - 3}{a_1 + 1} = \frac{1}{5}$$

であるから、これと(1)の答えを合わせて、数列 $\{b_n\}$ の一般項は、

$$b_n = \left(\frac{1}{5}\right)^n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

である。これを

$$b_n = \frac{a_n - 3}{a_n + 1} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

に代入して、

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{5}\right)^n &= \frac{a_n - 3}{a_n + 1} \\ \Leftrightarrow a_n &= \frac{3 \cdot 5^n + 1}{5^n - 1} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad a_n = \frac{3 \cdot 5^n + 1}{5^n - 1} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

(1)

2つの曲線を

$$C_1: y = x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1$$

$$C_2: y = -x^2 + 2|x| + 12 = \begin{cases} -x^2 - 2x + 12 = -(x+1)^2 + 13 & (x < 0) \\ -x^2 + 2x + 12 = -(x-1)^2 + 13 & (x \geq 0) \end{cases}$$

とおき、 x の値によって場合分けをしながら C_1 と C_2 の交点を求める。

[1] $x < 0$ のとき

交点の x 座標は、

$$x^2 - 2x + 2 = -x^2 - 2x + 12$$

$$2x^2 - 10 = 0$$

$$\therefore x = -\sqrt{5} \quad (\because x < 0)$$

となる。

[2] $x \geq 0$ のとき

交点の x 座標は、

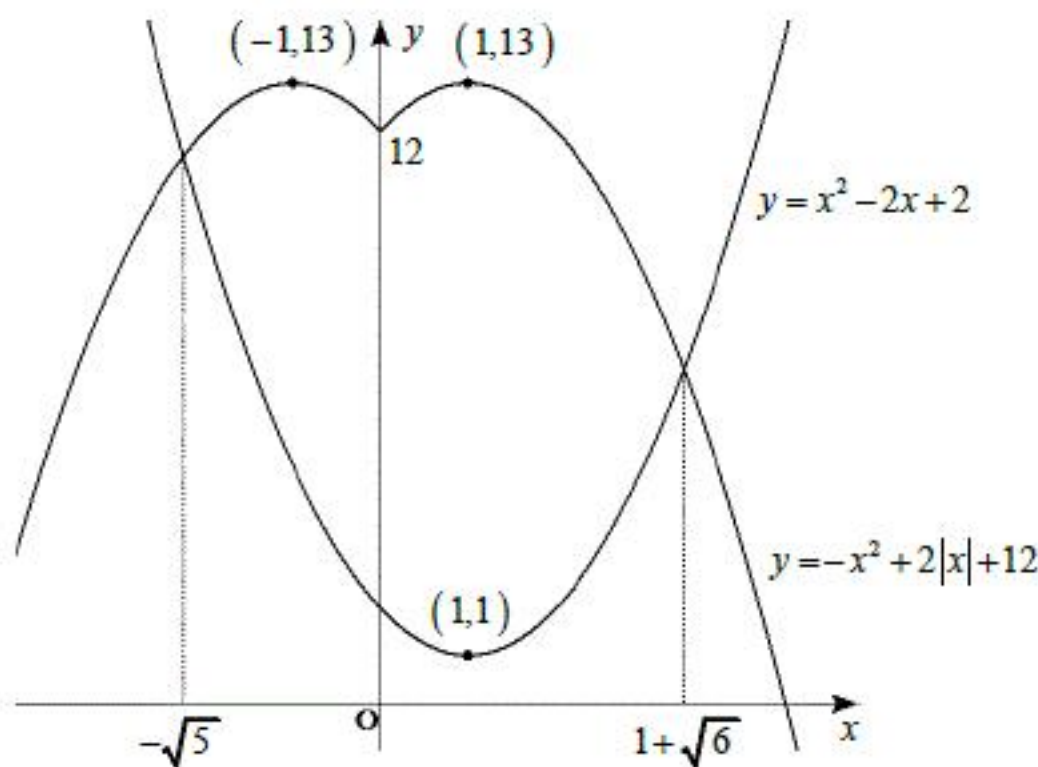
$$x^2 - 2x + 2 = -x^2 + 2x + 12$$

$$x^2 - 2x - 5 = 0$$

$$\therefore x = 1 + \sqrt{6} \quad (\because x \geq 0)$$

となる。

以上[1], [2]より、グラフは次のようになる。



(2)

求める面積は、

$$\begin{aligned} & \int_{-\sqrt{5}}^0 \{(-x^2 - 2x + 12) - (x^2 - 2x + 2)\} dx + \int_0^{1+\sqrt{6}} \{(-x^2 + 2x + 12) - (x^2 - 2x + 2)\} dx \\ &= \int_{-\sqrt{5}}^0 (-2x^2 + 10) dx + \int_0^{1+\sqrt{6}} (-2x^2 + 4x + 10) dx \\ &= \left[-\frac{2}{3}x^3 + 10x \right]_{-\sqrt{5}}^0 + \left[-\frac{2}{3}x^3 + 2x^2 + 10x \right]_0^{1+\sqrt{6}} \\ &= -\left(\frac{10\sqrt{5}}{3} - 10\sqrt{5} \right) + \left\{ -\frac{2}{3}(1+\sqrt{6})^3 + 2(1+\sqrt{6})^2 + 10(1+\sqrt{6}) \right\} \\ &= \frac{20\sqrt{5}}{3} - \frac{2}{3}(19 + 9\sqrt{6}) + 2(7 + 2\sqrt{6}) + 10(1 + \sqrt{6}) \\ &= \frac{20\sqrt{5}}{3} + 8\sqrt{6} + \frac{34}{3} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{20\sqrt{5}}{3} + 8\sqrt{6} + \frac{34}{3}$$