

すべての正の整数 n に対して、 $3^{3n-2} + 5^{3n-1}$ が 7 の倍数であることを、数学的帰納法によって示す。

[1] $n=1$ のとき

$$3^{3-2} + 5^{3-1} = 28$$

であるから、 $3^{3n-2} + 5^{3n-1}$ は 7 の倍数となる。

[2] $n=k$ で成り立つと仮定したとき

仮定より $3^{3k-2} + 5^{3k-1}$ が 7 の倍数となるので、 a を整数として、

$$3^{3k-2} + 5^{3k-1} = 7a$$

とおける。このとき、

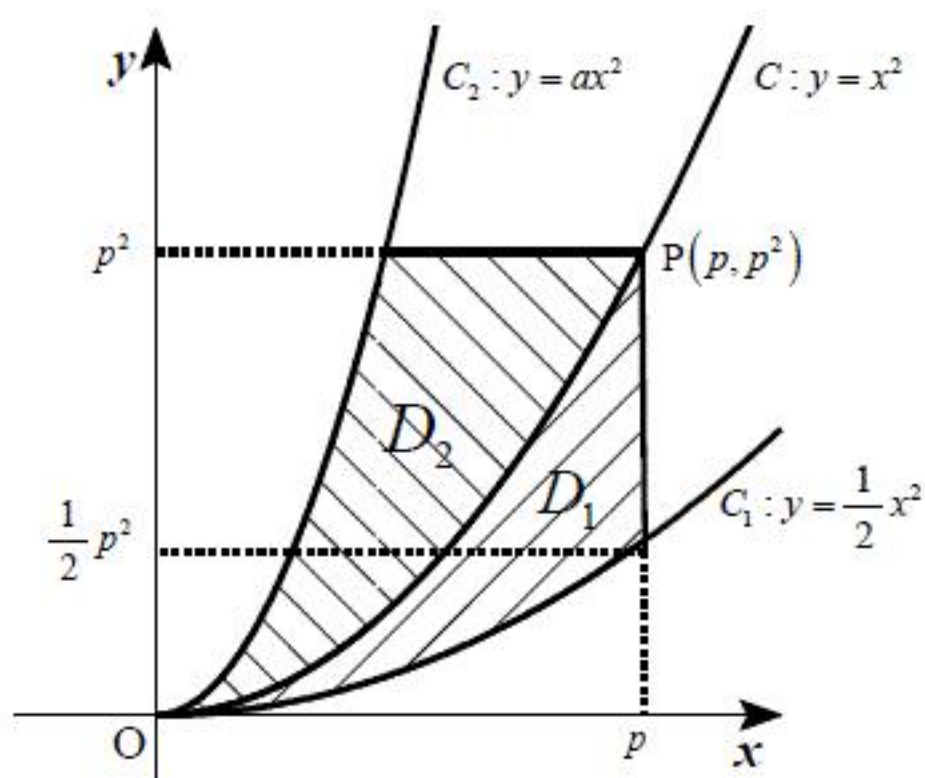
$$\begin{aligned} 3^{3(k+1)-2} + 5^{3(k+1)-1} &= 27 \cdot 3^{3k-2} + 125 \cdot 5^{3k-1} \\ &= 27(3^{3k-2} + 5^{3k-1}) + 98 \cdot 5^{3k-1} \\ &= 27 \cdot 7a + 98 \cdot 5^{3k-1} \\ &= 7(27a + 14 \cdot 5^{3k-1}) \end{aligned}$$

であるから、 $n=k+1$ のときも $3^{3n-2} + 5^{3n-1}$ は 7 の倍数となる。

以上[1], [2]より、 $3^{3n-2} + 5^{3n-1}$ はすべての正の整数 n に対して 7 の倍数であることが示された。

(証明終)

(1)



点 P の座標を $P(p, p^2)$ ($p > 0$) とおくと,

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_0^p \left(x^2 - \frac{1}{2}x^2 \right) dx \\ &= \int_0^p \frac{1}{2}x^2 dx \\ &= \left[\frac{1}{6}x^3 \right]_0^p \\ &= \frac{1}{6}p^3 \end{aligned}$$

である。また、 $C: x = \sqrt{y}$, $C_2: x = \sqrt{\frac{y}{a}}$ であるから,

$$\begin{aligned} S_2 &= \int_0^{p^2} \left(\sqrt{y} - \sqrt{\frac{y}{a}} \right) dy \\ &= \left(1 - \frac{1}{\sqrt{a}} \right) \int_0^{p^2} \sqrt{y} dy \\ &= \left(1 - \frac{1}{\sqrt{a}} \right) \left[\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}} \right]_0^{p^2} \\ &= \frac{2}{3} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{a}} \right) p^3 \end{aligned}$$

である。したがって,

$$\begin{aligned} S_1 &= S_2 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{6}p^3 &= \frac{2}{3} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{a}} \right) p^3 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{a}} &= \frac{3}{4} \\ \therefore a &= \frac{16}{9} \end{aligned}$$

となる。

(答) $a = \frac{16}{9}$

(2)

$C: x = \sqrt{y}$, $C_1: x = \sqrt{2y}$ なので,

$$\begin{aligned} V_1 &= \pi \int_0^{\frac{1}{2}p^2} \left\{ (\sqrt{2y})^2 - (\sqrt{y})^2 \right\} dy + \pi \int_{\frac{1}{2}p^2}^{p^2} \left\{ p^2 - (\sqrt{y})^2 \right\} dy \\ &= \pi \left\{ \int_0^{\frac{1}{2}p^2} y dy + \int_{\frac{1}{2}p^2}^{p^2} (p^2 - y) dy \right\} \\ &= \pi \left\{ \left[\frac{1}{2}y^2 \right]_0^{\frac{1}{2}p^2} + \left[p^2y - \frac{1}{2}y^2 \right]_{\frac{1}{2}p^2}^{p^2} \right\} \\ &= \pi p^4 \left\{ \frac{1}{8} + \left(1 - \frac{1}{2} \right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{4} \pi p^4 \end{aligned}$$

である。また,

$$\begin{aligned} V_2 &= \pi \int_0^{p^2} \left(y - \frac{y}{a} \right) dy \\ &= \pi \left(1 - \frac{1}{a} \right) \left[\frac{1}{2}y^2 \right]_0^{p^2} \\ &= \frac{1}{2} \pi \left(1 - \frac{1}{a} \right) p^4 \end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{aligned} V_1 &= V_2 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{4} \pi p^4 &= \frac{1}{2} \pi \left(1 - \frac{1}{a} \right) p^4 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2} &= 1 - \frac{1}{a} \quad (\because p > 0) \\ \Leftrightarrow a &= 2 \end{aligned}$$

となる。

(答) $a = 2$

(1)

$a=0$ のとき、 $y=0$ であり、 y の最大値が2となることはない。よって、以下では $a \neq 0$ の場合のみを考える。

$$y' = a(1 - 2\cos 2x)$$

より、 $y' = 0$ の時、 $\cos 2x = \frac{1}{2}$ であり、 $-2\pi \leq 2x \leq 2\pi$ より、

$$2x = -\frac{5}{3}\pi, -\frac{1}{3}\pi, \frac{1}{3}\pi, \frac{5}{3}\pi$$

$$\therefore x = -\frac{5}{6}\pi, -\frac{1}{6}\pi, \frac{1}{6}\pi, \frac{5}{6}\pi$$

となる。

[1] $a > 0$ のとき

y の増減表は次のようになる。

x	$-\pi$	...	$-\frac{5}{6}\pi$	...	$-\frac{1}{6}\pi$	...	$\frac{1}{6}\pi$	...	$\frac{5}{6}\pi$	...	π
y'		-	0	+	0	-	0	+	0	-	
y	$-\pi a$	$\searrow$		$\nearrow$	$a\left(-\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	$\searrow$		$\nearrow$	$a\left(\frac{5}{6}\pi + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	$\searrow$	

よって、 y の最大値は $a\left(\frac{5}{6}\pi + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ であり、これが2であるので

$$a\left(\frac{5}{6}\pi + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{12(5\pi - 3\sqrt{3})}{25\pi^2 - 27}$$

となる。これは $a > 0$ の条件を満たす。

[2] $a < 0$ のとき

y の増減表は次のようになる。

x	$-\pi$	...	$-\frac{5}{6}\pi$	...	$-\frac{1}{6}\pi$	...	$\frac{1}{6}\pi$	...	$\frac{5}{6}\pi$	...	π
y'		+	0	-	0	+	0	-	0	+	
y		$\nearrow$	$a\left(-\frac{5}{6}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	$\searrow$		$\nearrow$	$a\left(\frac{1}{6}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	$\searrow$		$\nearrow$	πa

よって、 y の最大値は $a\left(-\frac{5}{6}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ であり、これが2であるので、

$$a\left(-\frac{5}{6}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2$$

$$\Leftrightarrow a = -\frac{12(5\pi - 3\sqrt{3})}{25\pi^2 - 27}$$

となる。これは $a < 0$ の条件を満たす。

以上[1], [2]より、求める a の値は $a = \pm \frac{12(5\pi - 3\sqrt{3})}{25\pi^2 - 27}$ となる。

$$(\text{答}) \quad a = \pm \frac{12(5\pi - 3\sqrt{3})}{25\pi^2 - 27}$$

(2)

$$\begin{aligned} \int_1^3 \frac{\log(x+1)}{x^2} dx &= \left[-\frac{1}{x} \log(x+1) \right]_1^3 - \int_1^3 \left(-\frac{1}{x} \right) \cdot \frac{1}{x+1} dx \\ &= -\frac{1}{3} \log 4 + \log 2 + \int_1^3 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) dx \\ &= \frac{1}{3} \log 2 + [\log|x| - \log|x+1|]_1^3 \\ &= \frac{1}{3} \log 2 + (\log 3 - \log 4) - (0 - \log 2) \\ &= \log 3 - \frac{2}{3} \log 2 \end{aligned}$$

$$(\text{答}) \quad \log 3 - \frac{2}{3} \log 2$$

(ア)

条件より,

$$a_3 = 2a_2 + a_1 = 5$$

$$\begin{aligned} a_{n+3} &= 2a_{n+2} + a_{n+1} \\ &= 2(2a_{n+1} + a_n) + a_{n+1} \\ &= 5a_{n+1} + 2a_n \end{aligned}$$

である。

n が 2 以上の偶数のとき, $A^n = 8^{\frac{n}{2}} \begin{pmatrix} a_{n+1} & a_n \\ a_n & a_{n-1} \end{pmatrix}$ となることを数学的帰納法で示す。

[1] $n=2$ のとき

$$A^2 = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 40 & 16 \\ 16 & 8 \end{pmatrix} = 8 \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$8^{\frac{2}{2}} \begin{pmatrix} a_3 & a_2 \\ a_2 & a_1 \end{pmatrix} = 8 \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

であるから, $A^n = 8^{\frac{n}{2}} \begin{pmatrix} a_{n+1} & a_n \\ a_n & a_{n-1} \end{pmatrix}$ は成り立つ。

[2] $n=k$ (k は偶数) のとき, 成り立つと仮定すると

$$A^k = 8^{\frac{k}{2}} \begin{pmatrix} a_{k+1} & a_k \\ a_k & a_{k-1} \end{pmatrix}$$

より,

$$\begin{aligned} A^{k+2} &= A^k A^2 \\ &= 8^{\frac{k}{2}} \begin{pmatrix} a_{k+1} & a_k \\ a_k & a_{k-1} \end{pmatrix} \cdot 8 \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= 8^{\frac{k+2}{2}} \begin{pmatrix} 5a_{k+1} + 2a_k & 2a_{k+1} + a_k \\ 5a_k + 2a_{k-1} & 2a_k + a_{k-1} \end{pmatrix} \\ &= 8^{\frac{k+2}{2}} \begin{pmatrix} a_{k+3} & a_{k+2} \\ a_{k+2} & a_{k+1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となるので, $n=k+2$ のときも $A^n = 8^{\frac{n}{2}} \begin{pmatrix} a_{n+1} & a_n \\ a_n & a_{n-1} \end{pmatrix}$ が成り立つ。

以上[1], [2]より, n が 2 以上の偶数のとき $A^n = 8^{\frac{n}{2}} \begin{pmatrix} a_{n+1} & a_n \\ a_n & a_{n-1} \end{pmatrix}$ が成り立つことが示された。

(証明終)

(イ)

条件より,

$$\begin{aligned} b_3 &= 2b_2 + b_1 = 14 \\ b_4 &= 2b_3 + b_2 = 34 \\ b_{n+3} &= 2b_{n+2} + b_{n+1} \\ &= 2(2b_{n+1} + b_n) + b_{n+1} \\ &= 5b_{n+1} + 2b_n \end{aligned}$$

である。

n が 3 以上の奇数のとき, $A^n = 8^{\frac{n-1}{2}} \begin{pmatrix} b_{n+1} & b_n \\ b_n & b_{n-1} \end{pmatrix}$ となることを数学的帰納法で示す。

[1] $n=3$ のとき

$$A^3 = A^2 A = 8 \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = 8 \begin{pmatrix} 34 & 14 \\ 14 & 6 \end{pmatrix}$$

$$8^{\frac{3-1}{2}} \begin{pmatrix} b_4 & b_3 \\ b_3 & b_2 \end{pmatrix} = 8 \begin{pmatrix} 34 & 14 \\ 14 & 6 \end{pmatrix}$$

であるから, $A^n = 8^{\frac{n-1}{2}} \begin{pmatrix} b_{n+1} & b_n \\ b_n & b_{n-1} \end{pmatrix}$ は成り立つ。

[2] $n=k$ (k は奇数) の時, 成り立つと仮定すると

$$A^k = 8^{\frac{k-1}{2}} \begin{pmatrix} b_{k+1} & b_k \\ b_k & b_{k-1} \end{pmatrix}$$

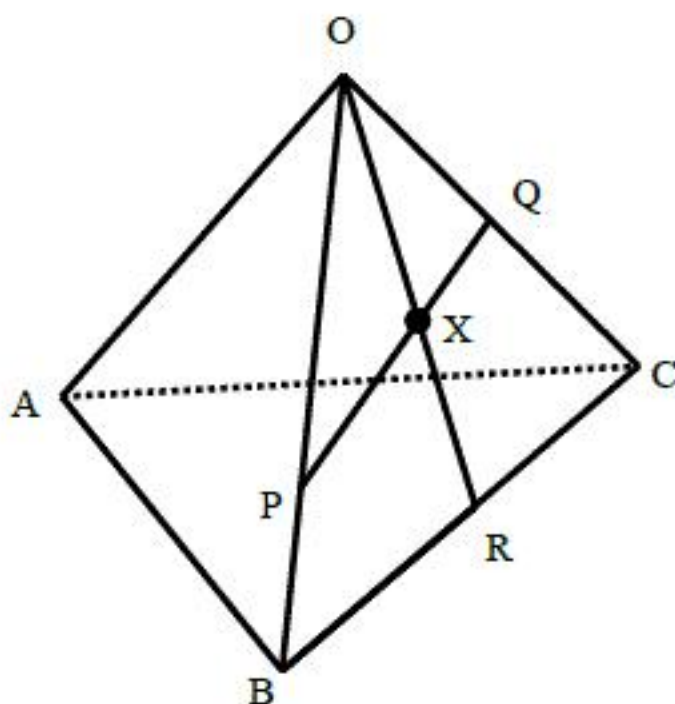
より,

$$\begin{aligned} A^{k+2} &= A^k A^2 \\ &= 8^{\frac{k-1}{2}} \begin{pmatrix} b_{k+1} & b_k \\ b_k & b_{k-1} \end{pmatrix} \cdot 8 \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= 8^{\frac{k+1}{2}} \begin{pmatrix} 5b_{k+1} + 2b_k & 2b_{k+1} + b_k \\ 5b_k + 2b_{k-1} & 2b_k + b_{k-1} \end{pmatrix} \\ &= 8^{\frac{k+1}{2}} \begin{pmatrix} b_{k+3} & b_{k+2} \\ b_{k+2} & b_{k+1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となるので, $n=k+2$ のときも $A^n = 8^{\frac{n-1}{2}} \begin{pmatrix} b_{n+1} & b_n \\ b_n & b_{n-1} \end{pmatrix}$ が成り立つ。

以上[1], [2]より, n が 3 以上の奇数のとき $A^n = 8^{\frac{n-1}{2}} \begin{pmatrix} b_{n+1} & b_n \\ b_n & b_{n-1} \end{pmatrix}$ が成り立つ。

(証明終)



(1)

$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とおくと条件より,

$$|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a} = 1 \cdot 1 \cdot \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

である。また,

$$\overrightarrow{OP} = \frac{3}{4}\vec{b}, \overrightarrow{OQ} = \frac{1}{2}\vec{c}, \overrightarrow{OR} = \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$$

である。点 X は直線 PQ 上にあるので, s を実数として,

$$\overrightarrow{OX} = s\overrightarrow{OP} + (1-s)\overrightarrow{OQ} = \frac{3}{4}s\vec{b} + \frac{1}{2}(1-s)\vec{c} \quad \dots \textcircled{1}$$

と書ける。また点 X は直線 OR 上にあるので, t を実数として,

$$\overrightarrow{OX} = t\overrightarrow{OR} = \frac{1}{2}t\vec{b} + \frac{1}{2}t\vec{c} \quad \dots \textcircled{2}$$

と書ける。 $\vec{b}$, $\vec{c}$ は 1 次独立なので, ①, ②より,

$$\begin{cases} \frac{3}{4}s = \frac{1}{2}t \\ \frac{1}{2}(1-s) = \frac{1}{2}t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s = \frac{2}{5} \\ t = \frac{3}{5} \end{cases}$$

であるから, $\overrightarrow{OX} = \frac{3}{10}(\vec{b} + \vec{c})$ となる。よって,

$$|\overrightarrow{OX}|^2 = \frac{9}{100}(|\vec{b}|^2 + 2\vec{b} \cdot \vec{c} + |\vec{c}|^2) = \frac{9}{100}(1+1+1) = \frac{27}{100}$$

$$\therefore |\overrightarrow{OX}| = \frac{3\sqrt{3}}{10} \quad (\because |\overrightarrow{OX}| > 0)$$

となる。

(答) $\frac{3\sqrt{3}}{10}$

(2)

$$\overrightarrow{AX} = \overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OA} = \frac{3}{10}\vec{b} + \frac{3}{10}\vec{c} - \vec{a}$$

であるから,

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{AX}|^2 &= \frac{9}{100}|\vec{b}|^2 + \frac{9}{100}|\vec{c}|^2 + |\vec{a}|^2 + \frac{18}{100}\vec{b} \cdot \vec{c} - \frac{6}{10}\vec{c} \cdot \vec{a} - \frac{6}{10}\vec{a} \cdot \vec{b} \\ &= \frac{9}{100} + \frac{9}{100} + 1 + \frac{9}{100} - \frac{3}{10} - \frac{3}{10} \\ &= \frac{67}{100} \end{aligned}$$

$$\therefore |\overrightarrow{AX}| = \frac{\sqrt{67}}{10}$$

となる。

(答) $\frac{\sqrt{67}}{10}$

「G, O, U, K, A, K, U の 7 文字を 1 列に並べる」事象を E_A とし、そのうち、「2 つの U が隣り合う事象」「2 つの K が隣り合う事象」をそれぞれ E_U, E_K とおく。このとき、求めるべき並べ方は、ある事象 E の並べ方の総数を $N(E)$ と書くことにしたときに、

$$N(E_A) - N(E_U \cup E_K) = N(E_A) - (N(E_U) + N(E_K) - N(E_U \cap E_K)) \quad \cdots \textcircled{1}$$

と表すことができる。

$N(E_A)$ について、U と K が 2 つずつある事に注意すると、

$$N(E_A) = \frac{7!}{2!2!} = 1260 \text{ (通り)}$$

$N(E_U)$ について、2 つの U を 1 つに見なした 6 文字の並べ方と見なすことができ、

$$N(E_U) = \frac{6!}{2!} = 360 \text{ (通り)}$$

$N(E_K)$ についても $N(E_U)$ と同様に考えて

$$N(E_K) = \frac{6!}{2!} = 360 \text{ (通り)}$$

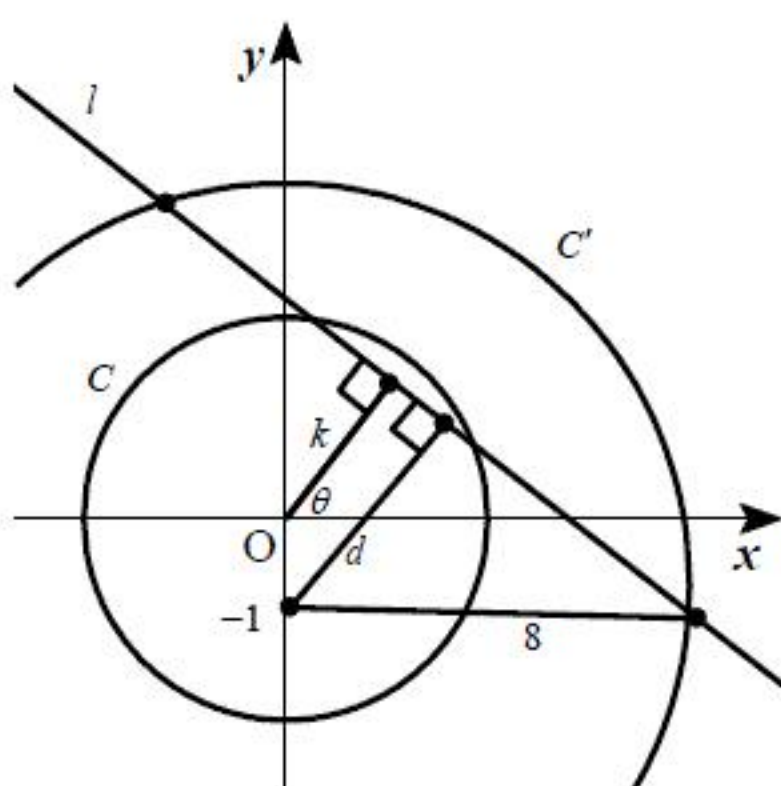
$N(E_U \cap E_K)$ については、2 つの U, K をそれぞれ 1 つに見なした 5 文字の並べ方と見なすことができ、

$$5! = 120 \text{ (通り)}$$

これらを①に代入すれば、同じ文字が隣り合わないような並べ方は

$$1260 - (360 + 360 - 120) = 660 \text{ (通り)}$$

あることがわかる。



(1)

円 C' の中心から直線 l までの距離を d とし、上図のように角度 θ ($0 \leq \theta < 2\pi$) を定めると、

$$d = k + \sin \theta \leq k + 1$$

となる。

また、円 C の内部領域を D_1 、円 C' の内部領域を D_2 とし、

直線 l と D_1, D_2, D の共通部分の長さを、それぞれ L_1, L_2, L_3 とすると、

$$\frac{L_1}{2} = \sqrt{3^2 - k^2} \Leftrightarrow L_1 = 2\sqrt{9 - k^2}$$

$$\frac{L_2}{2} = \sqrt{8^2 - d^2} \Leftrightarrow L_2 = 2\sqrt{64 - d^2} \geq 2\sqrt{64 - (k+1)^2}$$

であるから、

$$L_3 = L_2 - L_1 \geq 2\sqrt{64 - (k+1)^2} - 2\sqrt{9 - k^2}$$

となる。したがって、 l と D の共通部分の長さの最小値は $2\left(\sqrt{64 - (k+1)^2} - \sqrt{9 - k^2}\right)$ である。

$$(\text{答}) \quad 2\left(\sqrt{64 - (k+1)^2} - \sqrt{9 - k^2}\right)$$

(2)

直線 l と D が共有点をもつことは、すなわち k が $0 \leq k \leq 3$ の範囲にあることを意味するので、

この範囲での $2\left(\sqrt{64 - (k+1)^2} - \sqrt{9 - k^2}\right)$ の最小値が求める最小値である。

$$L_4 = 2\left(\sqrt{64 - (k+1)^2} - \sqrt{9 - k^2}\right)$$

とおけば、

$$\begin{aligned} \frac{dL_4}{dk} &= 2\left(-\frac{k+1}{\sqrt{64 - (k+1)^2}} + \frac{k}{\sqrt{9 - k^2}}\right) \\ &= 2 \cdot \frac{-(k+1)\sqrt{9 - k^2} + k\sqrt{64 - (k+1)^2}}{\sqrt{64 - (k+1)^2} \cdot \sqrt{9 - k^2}} \end{aligned}$$

ここで $\frac{dL_4}{dk} = 0$ とすると、

$$(k+1)\sqrt{9 - k^2} = k\sqrt{64 - (k+1)^2}$$

両辺 0 以上なので 2 乗して、

$$\begin{aligned} (k+1)^2(9 - k^2) &= k^2(64 - (k+1)^2) \\ 9(k+1)^2 - k^2(k+1)^2 &= 64k^2 - k^2(k+1)^2 \\ 9(k+1)^2 &= 64k^2 \end{aligned}$$

$$3(k+1) = 8k \quad (\because k+1 > 0, k \geq 0)$$

$$\therefore k = \frac{3}{5}$$

であるから、 L_4 の増減表は次のようになる。

k	0	...	$\frac{3}{5}$	...	3
$\frac{dL_4}{dk}$		-	0	+	
L_4	$6(\sqrt{7} - 1)$	$\searrow$	$4\sqrt{6}$	$\nearrow$	$8\sqrt{3}$

増減表より、 l と D の共通部分の長さの最小値は $4\sqrt{6}$ となる。

$$(\text{答}) \quad 4\sqrt{6}$$

$$\int_0^1 \{x(1-x)\}^{\frac{3}{2}} dx = \int_0^1 \left\{ -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \right\}^{\frac{3}{2}} dx$$

ここで、 $x - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \sin \theta$ と置換すると、 $dx = \frac{1}{2} \cos \theta d\theta$ であり、

x	$0 \rightarrow 1$
θ	$-\frac{\pi}{2} \rightarrow \frac{\pi}{2}$

であるから、

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left\{ -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \right\}^{\frac{3}{2}} dx &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(-\frac{1}{4} \sin^2 \theta + \frac{1}{4} \right)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{2} \cos \theta d\theta \\ &= \frac{1}{16} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \theta d\theta \\ &= \frac{1}{16} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1 + \cos 2\theta}{2} \right)^2 d\theta \\ &= \frac{1}{64} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + 2\cos 2\theta + \cos^2 2\theta) d\theta \\ &= \frac{1}{64} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + 2\cos 2\theta + \frac{1 + \cos 4\theta}{2} \right) d\theta \\ &= \frac{1}{64} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{3}{2} + 2\cos 2\theta + \frac{1}{2} \cos 4\theta \right) d\theta \\ &= \frac{1}{64} \left[\frac{3}{2} \theta + \sin 2\theta + \frac{1}{8} \sin 4\theta \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{3}{128} \pi \end{aligned}$$

となる。