

(1)

まず、 $\cos \theta \neq 0$ であるから、

$$\theta \neq \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi \quad \cdots \textcircled{1}$$

である。このもとで、方程式を変形すると

$$\begin{aligned} 2 \sin 2\theta &= \tan \theta + \frac{1}{\cos \theta} \\ \Leftrightarrow 4 \sin \theta \cos \theta &= \frac{\sin \theta + 1}{\cos \theta} \\ \Leftrightarrow 4 \sin \theta \cos^2 \theta &= \sin \theta + 1 \\ \Leftrightarrow 4 \sin \theta (1 - \sin^2 \theta) &= \sin \theta + 1 \\ \Leftrightarrow 4 \sin^3 \theta - 3 \sin \theta + 1 &= 0 \end{aligned}$$

となる。ここで、 $\sin \theta = t$ とおくと

$$\begin{aligned} 4t^3 - 3t + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow (t+1)(4t^2 - 4t + 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow (t+1)(2t-1)^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow t = -1, \frac{1}{2} \end{aligned}$$

となる。

[1] $t = -1$ のとき

$0 \leq \theta < 2\pi$ から

$$\sin \theta = -1 \Leftrightarrow \theta = \frac{3}{2}\pi$$

となるが、 $\textcircled{1}$ より不適。

[2] $t = \frac{1}{2}$ のとき

$0 \leq \theta < 2\pi$ から

$$\begin{aligned} \sin \theta &= \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow \theta &= \frac{1}{6}\pi, \frac{5}{6}\pi \end{aligned}$$

となる。

[1], [2]より、求める解は

$$\theta = \frac{1}{6}\pi, \frac{5}{6}\pi$$

である。

$$(\text{答}) \quad \theta = \frac{1}{6}\pi, \frac{5}{6}\pi$$

(2)

条件から

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AP} &= \frac{1}{2}\vec{b} \\ \overrightarrow{AQ} &= \frac{1}{2}\vec{c} \\ \overrightarrow{AR} &= \frac{1}{2}(\vec{c} + \vec{d}) \\ \overrightarrow{AS} &= \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{d}) \end{aligned}$$

となり、さらに

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PQ} &= \frac{1}{2}(\vec{c} - \vec{b}) \\ \overrightarrow{PR} &= \frac{1}{2}(\vec{c} + \vec{d} - \vec{b}) \\ \overrightarrow{PS} &= \frac{1}{2}\vec{d} \end{aligned}$$

となる。これより、

$$\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{PS} \quad \cdots \textcircled{2}$$

が成り立つので、4点 P, Q, R, S が同一平面上にあることが示された。

また、正四面体 ABCD の一辺の長さを k とおくと

$$\begin{aligned} |\vec{b}| &= |\vec{c}| = |\vec{d}| = k \\ \vec{b} \cdot \vec{c} &= \vec{c} \cdot \vec{d} = \vec{b} \cdot \vec{d} = k^2 \cos \frac{\pi}{3} = \frac{k^2}{2} \end{aligned}$$

となるので、

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{PQ}|^2 &= \frac{1}{4}(\vec{c} - \vec{b})^2 \\ &= \frac{1}{4}(|\vec{c}|^2 - 2\vec{c} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2) \\ &= \frac{1}{4}k^2 \end{aligned}$$

$$|\overrightarrow{PS}|^2 = \frac{1}{4}k^2$$

$$\therefore |\overrightarrow{PQ}| = |\overrightarrow{PS}| \quad \cdots \textcircled{3}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PS} &= \frac{1}{4}(\vec{c} \cdot \vec{d} - \vec{b} \cdot \vec{d}) \\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{k^2}{2} - \frac{k^2}{2}\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\therefore \angle QPS = 90^\circ \quad \cdots \textcircled{4}$$

となる。②、③、④より、四角形 PQRS が正方形であることが示された。

(証明終)

真数条件と底の条件から、 $x > 0, y > 0, x \neq 1, y \neq 1$ となる。このもとで不等式を変形すると、

$$\log_x y \leq \log_y x$$

$$\Leftrightarrow \log_x y \leq \frac{1}{\log_x y}$$

$$\Leftrightarrow (\log_x y)^2 \leq \log_x y$$

$$\Leftrightarrow \log_x y \{(\log_x y)^2 - 1\} \leq 0$$

となる。

[1] $\log_x y < 0$ のとき

$$(\log_x y)^2 - 1 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (\log_x y)^2 \geq 1$$

$$\therefore \log_x y \leq -1$$

となる。

[a] $0 < x < 1$ のとき

$$\log_x y \leq -1$$

$$\Leftrightarrow y \geq \frac{1}{x}$$

となる。

[b] $1 < x$ のとき

$$\log_x y \leq -1$$

$$\Leftrightarrow 0 < y \leq \frac{1}{x}$$

となる。

[2] $\log_x y > 0$ のとき

$$(\log_x y)^2 - 1 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (\log_x y)^2 \leq 1$$

$$\therefore 0 < \log_x y \leq 1$$

となる。

[a] $0 < x < 1$ のとき

$$0 < \log_x y \leq 1$$

$$\Leftrightarrow x \leq y < 1$$

となる。

[b] $1 < x$ のとき

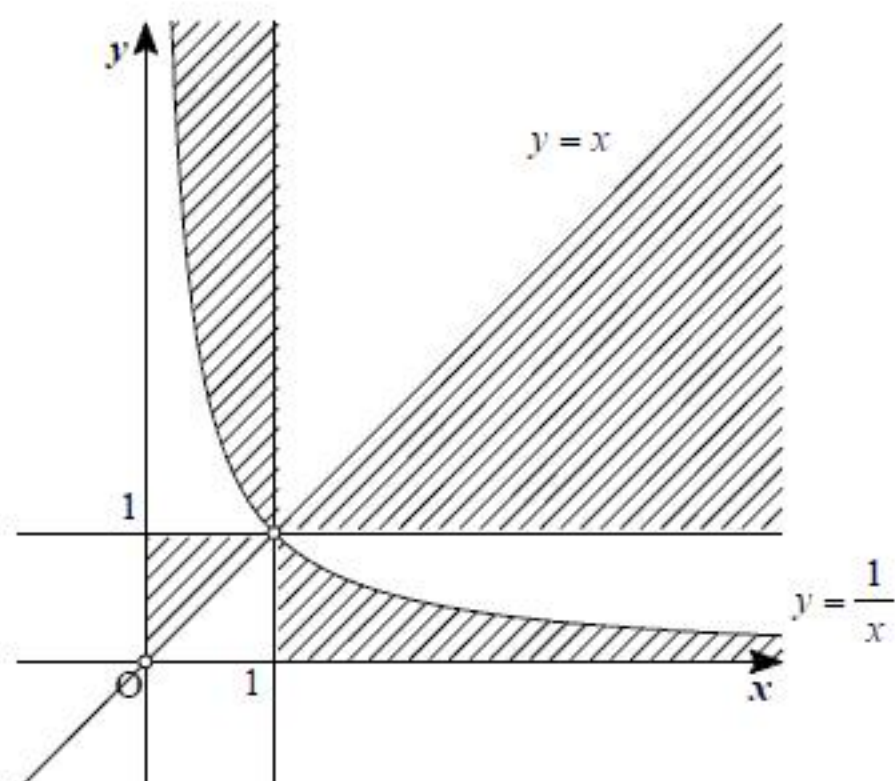
$$0 < \log_x y \leq 1$$

$$\Leftrightarrow 1 < y \leq x$$

となる。

以上より、求める領域は次図の斜線部となる。ただし、境界は $y = x$ 上と $y = \frac{1}{x}$ 上のみ含み、

白丸は含まない。



(答) 上図斜線部

(1)

2 曲線の交点の x 座標を求めると

$$\begin{aligned} x^3 + 4x^2 - x &= x^2 + 3 \\ \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 - x - 3 &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2(x+3) - (x+3) &= 0 \\ \Leftrightarrow (x^2 - 1)(x+3) &= 0 \\ \Leftrightarrow x = -3, \pm 1 \end{aligned}$$

となる。ここで、 $x_1 < x_2 < x_3$ であるから、

$$x_1 = -3, x_2 = -1, x_3 = 1$$

となる。2 点 $(-3, 12), (1, 4)$ を通る直線 L の方程式は、

$$y = -2x + 6$$

である。直線 L と $y = x^2 + 3$ の交点の x 座標は $x = -3, 1$ なので、 D の面積は

$$\begin{aligned} \int_{-3}^1 \{(-2x+6) - (x^2+3)\} dx &= \int_{-3}^1 -(x+3)(x-1) dx \\ &= \frac{1}{6} \{1 - (-3)\}^3 \\ &= \frac{32}{3} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{32}{3}$

(2)

$y = x^2 + 3$ を微分すると、 $y' = 2x$ である。よって、 $(-3, 12)$ における接線 L_1 の方程式は

$$\begin{aligned} y - 12 &= -6(x + 3) \\ \Leftrightarrow y &= -6x - 6 \end{aligned}$$

であり、 $(1, 4)$ における接線 L_2 の方程式は

$$\begin{aligned} y - 4 &= 2(x - 1) \\ \Leftrightarrow y &= 2x + 2 \end{aligned}$$

である。 L_1 と L_2 の交点の x 座標を求めると

$$\begin{aligned} -6x - 6 &= 2x + 2 \\ \Leftrightarrow x &= -1 \end{aligned}$$

となるから、直線 L_0 の方程式は $x = -1$ である。

領域 D のうち、直線 L_0 より右側にある部分の面積を求めると

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 -(x+3)(x-1) dx &= - \int_{-1}^1 (x^2 + 2x - 3) dx \\ &= - \left[\frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x \right]_{-1}^1 \\ &= \frac{16}{3} \end{aligned}$$

となる。これは、(1)で求めた D の面積の半分に等しいので、直線 L_0 は D の面積を二等分することが示された。

(証明終)