

(1)

[1] $m=n$ のとき

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\pi} \cos mx \cos nx dx &= \int_0^{\pi} \cos^2 mx dx \\
 &= \int_0^{\pi} \frac{1 + \cos 2mx}{2} dx \\
 &= \left[\frac{1}{2}x + \frac{1}{4m} \sin 2mx \right]_0^{\pi} \\
 &= \frac{\pi}{2}
 \end{aligned}$$

となる。

[2] $m \neq n$ のとき $m+n, m-n$ が整数であることに注意すると、

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\pi} \cos mx \cos nx dx &= \int_0^{\pi} \frac{1}{2} \{ \cos(m+n)x + \cos(m-n)x \} dx \\
 &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{m+n} \sin(m+n)x + \frac{1}{m-n} \sin(m-n)x \right]_0^{\pi} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

となる。

(答) $m=n$ のとき $\frac{\pi}{2}$, $m \neq n$ のとき 0

(2)

$$t = \log x \Leftrightarrow x = e^t$$

とおくと、

$$dx = e^t dt$$

である。このとき、

x	$1 \rightarrow 3$
t	$0 \rightarrow \log 3$

であるから、

$$\begin{aligned}
 \int_1^3 \left(x - \frac{1}{x} \right) (\log x)^2 dx &= \int_0^{\log 3} \left(e^t - \frac{1}{e^t} \right) t^2 \cdot e^t dt \\
 &= \int_0^{\log 3} (t^2 e^{2t} - t^2) dt \\
 &= \left[t^2 \cdot \frac{1}{2} e^{2t} \right]_0^{\log 3} - \int_0^{\log 3} 2t \cdot \frac{1}{2} e^{2t} dt - \left[\frac{1}{3} t^3 \right]_0^{\log 3} \\
 &= \frac{1}{2} e^{2\log 3} (\log 3)^2 - \frac{1}{3} (\log 3)^3 - \left[t \cdot \frac{1}{2} e^{2t} \right]_0^{\log 3} + \int_0^{\log 3} \frac{1}{2} e^{2t} dt \\
 &= -\frac{1}{3} (\log 3)^3 + \frac{9}{2} (\log 3)^2 - \frac{1}{2} e^{2\log 3} \log 3 + \left[\frac{1}{4} e^{2t} \right]_0^{\log 3} \\
 &= -\frac{1}{3} (\log 3)^3 + \frac{9}{2} (\log 3)^2 - \frac{9}{2} \log 3 + \frac{1}{4} (e^{2\log 3} - 1) \\
 &= -\frac{1}{3} (\log 3)^3 + \frac{9}{2} (\log 3)^2 - \frac{9}{2} \log 3 + 2
 \end{aligned}$$

となる。

(答) $-\frac{1}{3}(\log 3)^3 + \frac{9}{2}(\log 3)^2 - \frac{9}{2}\log 3 + 2$

(1)

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\{e^{-x}(\sin x + \cos x)\} &= -e^{-x}(\sin x + \cos x) + e^{-x}(\cos x - \sin x) \\ &= -2e^{-x}\sin x\end{aligned}$$

となる。

(答) $-2e^{-x}\sin x$

(2)

(1)より,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\{e^{-x}(\sin x + \cos x)\} &= -2e^{-x}\sin x \\ \Leftrightarrow e^{-x}\sin x &= \frac{d}{dx}\left\{-\frac{1}{2}e^{-x}(\sin x + \cos x)\right\}\end{aligned}$$

である。

[1] n が奇数のとき

$$\begin{aligned}S_n &= \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} e^{-x}(|\sin x| + 1)dx \\ &= \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} e^{-x}(\sin x + 1)dx \\ &= \left[-\frac{1}{2}e^{-x}(\sin x + \cos x + 2)\right]_{(n-1)\pi}^{n\pi} \\ &= -\frac{1}{2}e^{-n\pi}(0 - 1 + 2) + \frac{1}{2}e^{-(n-1)\pi}(0 + 1 + 2) \\ &= \frac{1}{2}(3e^{\pi} - 1)e^{-n\pi}\end{aligned}$$

となる。

[2] n が偶数のとき

$$\begin{aligned}S_n &= \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} e^{-x}(|\sin x| + 1)dx \\ &= \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} e^{-x}(-\sin x + 1)dx \\ &= \left[\frac{1}{2}e^{-x}(\sin x + \cos x - 2)\right]_{(n-1)\pi}^{n\pi} \\ &= \frac{1}{2}e^{-n\pi}(0 + 1 - 2) - \frac{1}{2}e^{-(n-1)\pi}(0 - 1 - 2) \\ &= \frac{1}{2}(3e^{\pi} - 1)e^{-n\pi}\end{aligned}$$

となる。

以上[1], [2]より, n の偶奇にかかわらず,

$$S_n = \frac{1}{2}(3e^{\pi} - 1)e^{-n\pi}$$

となる。また,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} S_n &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}(3e^{\pi} - 1)e^{-n\pi} \\ &= \frac{1}{2}(3e^{\pi} - 1) \cdot \frac{e^{-\pi}}{1 - e^{-\pi}} \\ &= \frac{3e^{\pi} - 1}{2e^{\pi} - 2}\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad S_n = \frac{1}{2}(3e^{\pi} - 1)e^{-n\pi}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{3e^{\pi} - 1}{2e^{\pi} - 2}$$

(1)

 $x^2 \geq 0$ であるから,

$$e^{x^2} \geq 1$$

$$\therefore e^{-x^2} \leq 1 \quad \dots \textcircled{1}$$

である。また、 $f(x) = e^{-x^2} - (1 - x^2)$ とおくと、

$$\begin{aligned} f'(x) &= -2xe^{-x^2} + 2x \\ &= 2x(1 - e^{-x^2}) \end{aligned}$$

である。ここで、 $1 - e^{-x^2} \geq 0$ であるから、 $f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	$\dots$	0	$\dots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$

増減表より、

$$f(x) \geq 0 \Leftrightarrow 1 - x^2 \leq e^{-x^2} \quad \dots \textcircled{2}$$

である。したがって①、②より、すべての実数 x に対して、

$$1 - x^2 \leq e^{-x^2} \leq 1$$

が成り立つ。

(証明終)

(2)

(1)より、

$$1 - \left(\frac{x}{n}\right)^2 \leq e^{-\left(\frac{x}{n}\right)^2} \leq 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 \left\{ 1 - \left(\frac{x}{n}\right)^2 \right\} \leq x^2 e^{-\left(\frac{x}{n}\right)^2} \leq x^2$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 x^2 \left\{ 1 - \left(\frac{x}{n}\right)^2 \right\} dx \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 x^2 e^{-\left(\frac{x}{n}\right)^2} dx \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 x^2 dx$$

である。ここで、

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 x^2 \left\{ 1 - \left(\frac{x}{n}\right)^2 \right\} dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{5n^2} x^5 \right]_0^1 \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5n^2} \right) \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

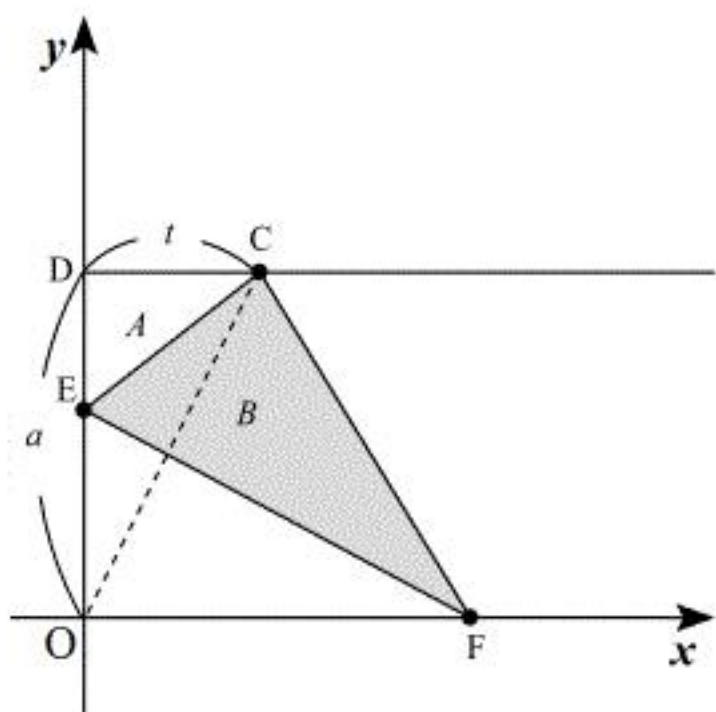
であるから、はさみうちの原理より、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 x^2 e^{-\left(\frac{x}{n}\right)^2} dx = \frac{1}{3}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 x^2 e^{-\left(\frac{x}{n}\right)^2} dx = \frac{1}{3}$$

(1)



上図のような xy 平面を考え、点 C, D, E, F を定める。

また、点 C の座標を $C(t, a)$ とし、 t は $0 < t < 9a$ を満たす実数とする。

直線 EF は線分 OC の垂直二等分線であり、線分 OC の傾きは $\frac{a}{t}$ であるから、直線 EF の傾き

は $-\frac{t}{a}$ である。また、直線 EF は線分 OC の中点 $\left(\frac{t}{2}, \frac{a}{2}\right)$ を通るので、その方程式は、

$$y = -\frac{t}{a}\left(x - \frac{t}{2}\right) + \frac{a}{2}$$

$$\therefore y = -\frac{t}{a}x + \frac{t^2}{2a} + \frac{a}{2} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

である。①で $x=0$ とすると、

$$y = \frac{t^2}{2a} + \frac{a}{2}$$

であり、 $y=0$ とすると、

$$0 = -\frac{t}{a}x + \frac{t^2}{2a} + \frac{a}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{t}{2} + \frac{a^2}{2t}$$

であるから、点 E, F の座標は、

$$E\left(0, \frac{t^2}{2a} + \frac{a}{2}\right), F\left(\frac{t}{2} + \frac{a^2}{2t}, 0\right)$$

である。ここで、点 E の y 座標について、

$$0 < \frac{t^2}{2a} + \frac{a}{2} < a$$

$$\Leftrightarrow t^2 < a^2$$

$$\therefore (0 <) t < a \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

であり、点 F の x 座標について、

$$0 < \frac{t}{2} + \frac{a^2}{2t} \leq 9a$$

$$\Leftrightarrow t^2 - 18at + a^2 \leq 0$$

$$\therefore (9 - 4\sqrt{5})a \leq t < 9a \quad (\because 0 < t < 9a) \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

である。したがって②、③より、 t のとり得る範囲は、

$$(9 - 4\sqrt{5})a \leq t < a$$

である。三角形 A の面積を $S_A(t)$ とすると、

$$S_A(t) = \frac{1}{2} \cdot DE \cdot DC$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ a - \left(\frac{t^2}{2a} + \frac{a}{2} \right) \right\} t$$

$$= -\frac{1}{4a} t^3 + \frac{a}{4} t$$

$$S'_A(t) = -\frac{3}{4a} t^2 + \frac{a}{4}$$

であるから、 $S_A(t)$ の増減表は次のようになる。

t	$(9 - 4\sqrt{5})a$	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{3}}a$	$\cdots$	a
$S'_A(t)$		+	0	−	
$S_A(t)$		$\nearrow$	$\frac{\sqrt{3}}{18}a^2$	$\searrow$	

増減表より、 $S_A(t)$ の最大値は $\frac{\sqrt{3}}{18}a^2$ となる。

(答) $\frac{\sqrt{3}}{18}a^2$

(2)

三角形 B の面積を $S_B(t)$ とすると、

$$S_B(t) = \frac{1}{2} \cdot OE \cdot OF$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{t^2}{2a} + \frac{a}{2} \right) \left(\frac{t}{2} + \frac{a^2}{2t} \right)$$

$$= \frac{1}{8} \left(\frac{t^3}{a} + 2at + \frac{a^3}{t} \right)$$

$$S'_B(t) = \frac{1}{8} \left(\frac{3}{a} t^2 + 2a - \frac{a^3}{t^2} \right)$$

$$= \frac{1}{8at^2} (t^2 + a^2) (3t^2 - a^2)$$

であるから、 $S_B(t)$ の増減表は次のようになる。

t	$(9 - 4\sqrt{5})a$	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{3}}a$	$\cdots$	a
$S'_B(t)$		−	0	+	
$S_B(t)$		$\searrow$	$\frac{2\sqrt{3}}{9}a^2$	$\nearrow$	

増減表より、 $S_B(t)$ の最小値は $\frac{2\sqrt{3}}{9}a^2$ となる。

(答) $\frac{2\sqrt{3}}{9}a^2$

(1)

1つの頂点からひける対角線の本数は、

$$20-1-2=17 \text{ (本)}$$

であるから、重複分を考慮すると、正20角形Pの対角線の本数は、

$$\frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 17 = 170 \text{ (本)}$$

となる。

(答) 170 本

(2)

以下、1頂点を固定して考える。

合同な三角形を区別しないとき、二等辺三角形の数は、固定した点を頂角の頂点とし、底辺の取り方で考えれば、

$$\frac{20}{2} - 2 = 8 \text{ 個}$$

であり、合同な三角形も区別すると、回転を考えれば、二等辺三角形は

$$8 \cdot 3 = 24 \text{ 個} \quad \cdots \text{①}$$

となる。

また、合同な三角形を区別するとき、三角形の個数は、固定した頂点とその両隣を除く17頂点から2つ、隣り合わずに選ぶ場合の数なので、

$${}_{17-1}C_2 = 120$$

である。その内、二等辺三角形でない三角形は、①より、

$$120 - 24 = 96 \text{ 個}$$

である。このとき、回転・折り返しを考えると、6つずつ合同な三角形があるので、合同な三角形を区別しないと、二等辺三角形でない三角形は、

$$\frac{96}{6} = 16 \text{ 個}$$

である。よって、二等辺三角形と合わせて、合同な三角形を区別しないとき、全三角形の個数は

$$8 + 16 = 24 \text{ 個}$$

である。

(答) 24 個

(1)

$$A \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{1}{2}} & -\sqrt{\frac{3}{2}} \\ \sqrt{\frac{3}{2}} & \sqrt{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}$$

であるから,

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{1}{2}} & -\sqrt{\frac{3}{2}} \\ \sqrt{\frac{3}{2}} & \sqrt{\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{1}{2}} & -\sqrt{\frac{3}{2}} \\ \sqrt{\frac{3}{2}} & \sqrt{\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4} \begin{pmatrix} \sqrt{3}+1 & -\sqrt{3}+1 \\ \sqrt{3}-1 & \sqrt{3}+1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A^2 &= \frac{1}{8} \begin{pmatrix} \sqrt{3}+1 & -\sqrt{3}+1 \\ \sqrt{3}-1 & \sqrt{3}+1 \end{pmatrix}^2 \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad A = \frac{\sqrt{2}}{4} \begin{pmatrix} \sqrt{3}+1 & -\sqrt{3}+1 \\ \sqrt{3}-1 & \sqrt{3}+1 \end{pmatrix}, \quad A^2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

(2)

$$\begin{aligned} A &= \frac{\sqrt{2}}{4} \begin{pmatrix} \sqrt{3}+1 & -\sqrt{3}+1 \\ \sqrt{3}-1 & \sqrt{3}+1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{12} & -\sin \frac{\pi}{12} \\ \sin \frac{\pi}{12} & \cos \frac{\pi}{12} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} &= A^3 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \\ &= A^3 \cdot A \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} \\ &= A^4 \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{3} & -\sin \frac{\pi}{3} \\ \sin \frac{\pi}{3} & \cos \frac{\pi}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

である。したがって、点 Q は点 R を原点中心に $\frac{\pi}{3}$ だけ回転移動させた点であるから、

$$\begin{aligned} \text{OQ} &= \text{OR} \\ \angle \text{QOR} &= 60^\circ \end{aligned}$$

である。よって、三角形 OQR は正三角形となる。

(証明終)

(3)

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = A^3 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \left(\frac{\pi}{4} \right) & -\sin \left(\frac{\pi}{4} \right) \\ \sin \left(\frac{\pi}{4} \right) & \cos \left(\frac{\pi}{4} \right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

であるから、点 Q は点 P を原点中心に $\frac{\pi}{4}$ だけ回転移動させた点であるから、

三角形 OPQ は、

$$\begin{aligned} \text{OP} &= \text{OQ} \\ \angle \text{POQ} &= \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

をみたす二等辺三角形となる。したがって、

$$\angle \text{OPQ} = \left(\pi - \frac{\pi}{4} \right) \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8} \pi$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{3}{8} \pi$$