

(1)

$$\begin{aligned}\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right) &= \cos x \cos \frac{\pi}{6} + \sin x \sin \frac{\pi}{6} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x + \frac{1}{2} \sin x\end{aligned}$$

であるから、与式は、

$$\begin{aligned}2 \sin x &> \cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right) \\ \Leftrightarrow 2 \sin x &> \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x + \frac{1}{2} \sin x \\ \Leftrightarrow \sqrt{3} \sin x - \cos x &> 0 \\ \Leftrightarrow 2 \sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right) &> 0\end{aligned}$$

と変形できる。 $0 \leq x < 2\pi$ であるから、上式を満たす x の範囲は

$$\frac{\pi}{6} < x < \frac{7\pi}{6}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{\pi}{6} < x < \frac{7\pi}{6}$$

(2)

$$\begin{aligned}\log_{105} 175 &= \frac{\log_5 175}{\log_5 105} \\ &= \frac{2 + \log_5 7}{1 + \log_5 3 + \log_5 7} \\ &= \frac{2 + \log_5 7}{1 + \frac{1}{\log_3 5} + \log_5 7}\end{aligned}$$

である。これに $\log_3 5 = a$, $\log_5 7 = b$ を代入すると、

$$\frac{2 + \log_5 7}{1 + \frac{1}{\log_3 5} + \log_5 7} = \frac{2 + b}{1 + \frac{1}{a} + b} = \frac{a(2 + b)}{1 + a + ab}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{a(2 + b)}{1 + a + ab}$$

(1)

点 (a, b) は $x^2 + y^2 = 1$ 上の点であるから,

$$a^2 + b^2 = 1$$

を満たす。 $t = a + b$ より,

$$\begin{aligned} t^2 &= (a+b)^2 \\ &= a^2 + b^2 + 2ab \\ &= 1 + 2ab \end{aligned}$$

である。したがって,

$$ab = \frac{t^2 - 1}{2}$$

であるから,

$$\begin{aligned} a + ab + b &= t + \frac{t^2 - 1}{2} \\ &= \frac{1}{2}t^2 + t - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

と表せる。

$$(\text{答}) \quad \frac{1}{2}t^2 + t - \frac{1}{2}$$

(2)

まず t がとりうる範囲を求める。点 (a, b) は $x^2 + y^2 = 1$ 上の点であることより, θ を $0 \leq \theta < 2\pi$ の実数として, $a = \cos \theta, b = \sin \theta$ とおくことができる。すると,

$$\begin{aligned} t &= a + b \\ &= \cos \theta + \sin \theta \\ &= \sqrt{2} \sin \left(\theta - \frac{\pi}{4} \right) \end{aligned}$$

であるから, $0 \leq \theta < 2\pi$ より,

$$-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}$$

である。ここで(1)より $a + ab + b = \frac{1}{2}t^2 + t - \frac{1}{2}$ であるから, $f(t) = \frac{1}{2}t^2 + t - \frac{1}{2}$ とおいて $f(t)$ の最大最小を調べる。

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2}t^2 + t - \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2}(t+1)^2 - 1 \end{aligned}$$

であり, $-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}$ であるから,最小値は

$$f(-1) = -1$$

となり,最大値は

$$f(\sqrt{2}) = \sqrt{2} + \frac{1}{2}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad t = \sqrt{2} \text{ のとき最大値 } \sqrt{2} + \frac{1}{2}$$

$$t = -1 \text{ のとき最小値 } -1$$

(1)

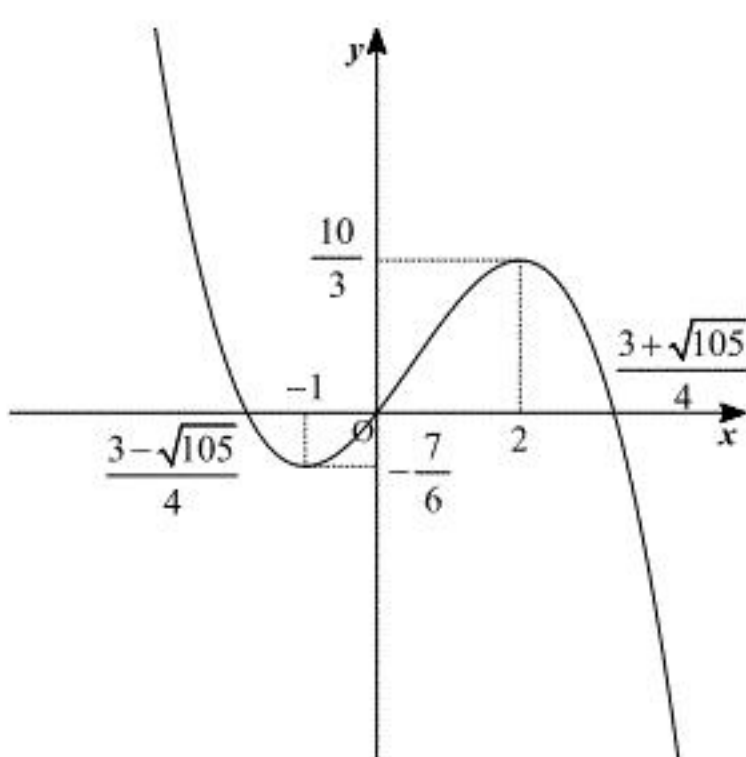
 $f(x)$ を微分すると、

$$\begin{aligned} f'(x) &= -x^2 + x + 2 \\ &= -(x+1)(x-2) \end{aligned}$$

であるから、増減表は下のようになる。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	$-\frac{7}{6}$	$\nearrow$	$\frac{10}{3}$	$\searrow$

よって、答のグラフの概形は下図のようになる。



(答) 前図

(2)

 a の値で場合分けする。[1] $a+2 \leq -1$ 、すなわち $a \leq -3$ のとき $x = a+2$ で $f(x)$ は最小である。よって、

$$\begin{aligned} g(a) &= f(a+2) \\ &= -\frac{1}{3}(a+2)^3 + \frac{1}{2}(a+2)^2 + 2(a+2) \\ &= -\frac{1}{3}a^3 - \frac{3}{2}a^2 + \frac{10}{3} \end{aligned}$$

である。

[2] $a+2 \geq -1$ かつ $a \leq -1$ 、すなわち $-3 \leq a \leq -1$ のとき $x = -1$ で $f(x)$ は最小である。よって、

$$\begin{aligned} g(a) &= f(-1) \\ &= -\frac{7}{6} \end{aligned}$$

である。

[3] $a \geq -1$ のとき次に、 $a \geq -1$ を考える。このとき、 $a \leq 2 \leq a+2$ で、 $f(a) = f(a+2)$ を満たす a を α とおく。すると、 $-1 \leq a \leq \alpha$ のとき、 $x = a$ で $f(x)$ は最小値をとり、 $\alpha \leq a$ のとき、 $x = a+2$ で $f(x)$ は最小値をとる。 α は、

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= f(\alpha+2) \\ \Leftrightarrow -\frac{1}{3}\alpha^3 + \frac{1}{2}\alpha^2 + 2\alpha &= -\frac{1}{3}(\alpha+2)^3 + \frac{1}{2}(\alpha+2)^2 + 2(\alpha+2) \\ \Leftrightarrow 3\alpha^2 + 3\alpha - 5 &= 0 \\ \Leftrightarrow \alpha &= \frac{-3 \pm \sqrt{69}}{6} \end{aligned}$$

また、 α は $\alpha \leq 2 \leq \alpha+2$ 、すなわち $0 \leq \alpha \leq 2$ であるから、

$$\alpha = \frac{-3 + \sqrt{69}}{6}$$

である。

よって、 $-1 \leq a \leq \frac{-3 + \sqrt{69}}{6}$ のとき、

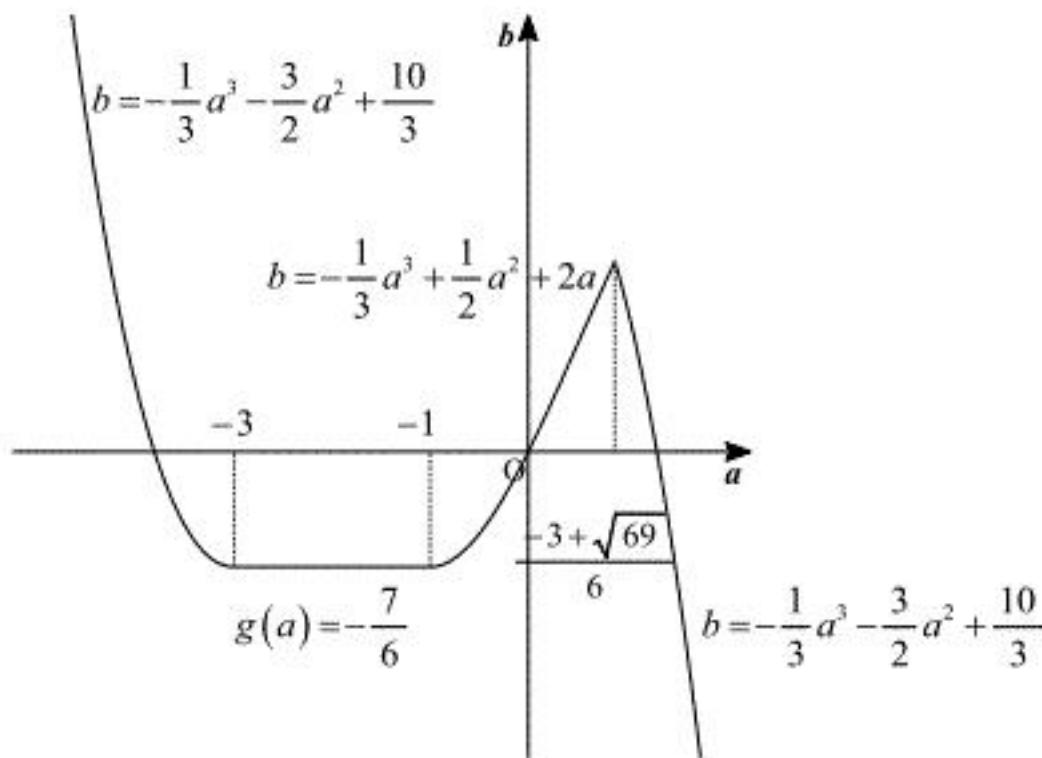
$$\begin{aligned} g(a) &= f(a) \\ &= -\frac{1}{3}a^3 + \frac{1}{2}a^2 + 2a \end{aligned}$$

である。

また、 $\frac{-3 + \sqrt{69}}{6} \leq a$ のとき、

$$\begin{aligned} g(a) &= f(a+2) \\ &= -\frac{1}{3}a^3 - \frac{3}{2}a^2 + \frac{10}{3} \end{aligned}$$

である。

以上[1], [2], [3]より、関数 $b = g(a)$ のグラフの概形は下の図のようになる。

(答) 前図