

(1)

$y = 2x + k$ を放物線 C の方程式に代入して

$$\begin{aligned} x^2 &= 2x + k \\ \Leftrightarrow x^2 - 2x - k &= 0 \end{aligned}$$

を得る。この 2 次方程式の判別式の値を D_1 とおくと、放物線 C と直線 L が異なる 2 点で交わる条件は

$$\begin{aligned} \frac{D_1}{4} &> 0 \\ \Leftrightarrow 1 + k &> 0 \\ \Leftrightarrow k &> -1 \end{aligned}$$

である。このとき、2 交点の x 座標は $1 \pm \sqrt{1+k}$ である。・・・①

また、 $y = 2x + k$ を放物線 D の方程式に代入して

$$\begin{aligned} x - 3 &= (2x + k - 7)^2 \\ \Leftrightarrow 4x^2 + (4k - 29)x + k^2 - 14k + 52 &= 0 \end{aligned}$$

を得る。この 2 次方程式の判別式の値を D_2 とおくと、放物線 D と直線 L が異なる 2 点で交わる条件は

$$\begin{aligned} D_2 &> 0 \\ \Leftrightarrow (4k - 29)^2 - 4 \cdot 4(k^2 - 14k + 52) &> 0 \\ \Leftrightarrow 9 - 8k &> 0 \\ \Leftrightarrow k &< \frac{9}{8} \end{aligned}$$

である。このとき、2 交点の x 座標は $\frac{-4k + 29 \pm \sqrt{9 - 8k}}{8}$ である。・・・②

以上より、 k の範囲は

$$-1 < k < \frac{9}{8}$$

である。

(答) $-1 < k < \frac{9}{8}$

(2)

$y = 2x + k$ 上の 2 点 $(x_1, 2x_1 + k)$, $(x_2, 2x_2 + k)$ の間の距離は

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (2x_2 + k - 2x_1 - k)^2} = \sqrt{5} |x_2 - x_1|$$

で求められる。よって線分 PQ と線分 RS の長さの和を $f(k)$ とおくと、①、②より

$$f(k) = \sqrt{5} \cdot 2\sqrt{1+k} + \sqrt{5} \cdot \frac{\sqrt{9-8k}}{4}$$

である。

$$\begin{aligned} f'(k) &= \sqrt{5} \left(\frac{1}{\sqrt{1+k}} - \frac{1}{\sqrt{9-8k}} \right) \\ &= \sqrt{5} \cdot \frac{\sqrt{9-8k} - \sqrt{1+k}}{\sqrt{(1+k)(9-8k)}} \end{aligned}$$

ここで、 $-1 < k < \frac{9}{8}$ の条件のもとで

$$\begin{aligned} f'(k) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow \sqrt{9-8k} - \sqrt{1+k} &\geq 0 \\ \Leftrightarrow 9-8k &\geq 1+k \\ \Leftrightarrow k &\leq \frac{8}{9} \end{aligned}$$

であるから、 $-1 < k < \frac{9}{8}$ における $f(k)$ の増減表は以下の通りである。

k	-1	...	$\frac{8}{9}$	...	$\frac{9}{8}$
$f'(k)$		+	0	-	
$f(k)$		↗		↘	

上の表より、2 線分の長さの和が最大となる k の値は $k = \frac{8}{9}$ である。

(答) $k = \frac{8}{9}$

(1)

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= (2x+2-e)e^x + \{x^2 + (2-e)x+1\}e^x \\
 &= \{x^2 + (4-e)x+3-e\}e^x \\
 &= (x+1)(x+3-e)e^x
 \end{aligned}$$

であり $2 < e$ より $-1 < e-3$ なので, 前式より $f(x)$ の増減表は以下の通りである。

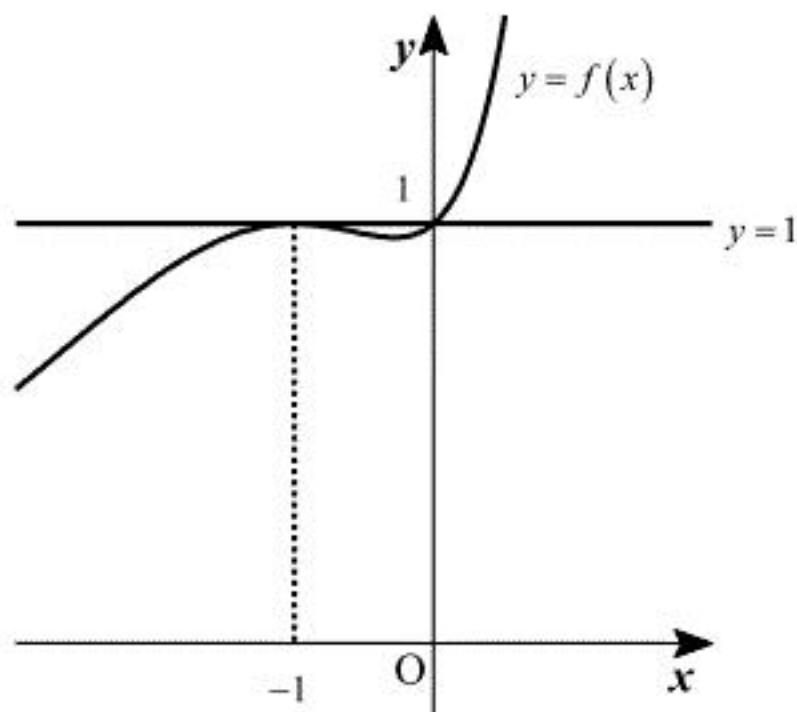
x	$\cdots$	-1	$\cdots$	$e-3$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	1	$\searrow$		$\nearrow$

よって関数 $f(x)$ の極大値は 1 である。

(答) 1

(2)

$y = f(x)$ のグラフは以下のようになる。



$f(0)=1$ であり, $x > e-3$ で $f(x)$ が単調増加であることから, $x > e-3$ での $y = f(x)$ と $y = 1$ の交点は $(0, 1)$ のみであることがわかる。よって, $y = f(x)$ と $y = 1$ に囲まれる部分の面積を S とおくと

$$\begin{aligned}
 S &= \int_{-1}^0 \{1 - f(x)\} dx \\
 &= 1 - \int_{-1}^0 \{x^2 + (2-e)x+1\} e^x dx
 \end{aligned}$$

となり, ここで,

$$\begin{aligned}
 \int x^2 e^x dx &= x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + C_1 \\
 \int x e^x dx &= x e^x - e^x + C_2
 \end{aligned}$$

(C_1, C_2 は積分定数)

であることに注意すれば,

$$\begin{aligned}
 S &= 1 - \left[x^2 e^x - x e^x + (1+e)e^x \right]_{-1}^0 \\
 &= 2 - e + \frac{2}{e}
 \end{aligned}$$

と求まる。

(答) $2 - e + \frac{2}{e}$

(1)

三角形 $OE'F'$ は角 E' が直角の二等辺三角形なので、 $\overrightarrow{OE'}$ は $\overrightarrow{OF'}$ を $\pm\frac{\pi}{4}$ 回転させて $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 倍にしたものである。よって

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OE'} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{4} & -\sin \frac{\pi}{4} \\ \sin \frac{\pi}{4} & \cos \frac{\pi}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 \\ 11 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 \\ 11 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -8 \\ 3 \end{pmatrix} \\ \overrightarrow{OE'} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \cos \left(-\frac{\pi}{4}\right) & -\sin \left(-\frac{\pi}{4}\right) \\ \sin \left(-\frac{\pi}{4}\right) & \cos \left(-\frac{\pi}{4}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 \\ 11 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 \\ 11 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

のいずれかであるが、点 E' が第 1 象限にあるので

$$\overrightarrow{OE'} = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \end{pmatrix}$$

である。よって点 E' の座標は $(3, 8)$ である。

(答) $(3, 8)$

(2)

f を表す行列を A とおく。 f によって点 E は点 E' に、点 F は点 F' に移るので

$$\begin{aligned}A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \end{pmatrix} \\ A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -5 \\ 11 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

である。よって

$$A \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 8 & 11 \end{pmatrix}$$

である。両辺に右から $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ をかけて

$$\begin{aligned}A &= \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 8 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & -8 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

である。

(答) $\begin{pmatrix} 3 & -8 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$

(3)

$$\left(\frac{3}{\sqrt{73}}\right)^2 + \left(\frac{8}{\sqrt{73}}\right)^2 = 1$$

より、 $\cos \alpha = \frac{3}{\sqrt{73}}$, $\sin \alpha = \frac{8}{\sqrt{73}}$ なる α をとって

$$A = \sqrt{73} \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

と表すことができる。これは、行列 A の表す 1 次変換 f が、原点中心に $\sqrt{73}$ 倍に拡大して α 回転する変換であることを表している。

従って、 f によって点 P が点 P' に、点 Q が点 Q' に移るとき、三角形 $OP'Q'$ は三角形 OPQ を原点中心に $\sqrt{73}$ 倍に拡大して α 回転したものであるから、三角形 $OP'Q'$ と三角形 OPQ は相似である。

(証明終)

(1)

$$\begin{aligned}
 \sin x + \sin y &= 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} \\
 &= 2 \sin \frac{\pi}{6} \cos \frac{x-y}{2} \\
 &= \cos \frac{x-y}{2}
 \end{aligned}$$

である。

$$\begin{aligned}
 x-y &= (x+y) - 2y \\
 &= \frac{\pi}{3} - 2y
 \end{aligned}$$

であり、 y は任意の実数をとるうるので $x-y$ も任意の実数値をとるうる。よって

$$\begin{aligned}
 -1 &\leq \cos \frac{x-y}{2} \leq 1 \\
 \Leftrightarrow -1 &\leq \sin x + \sin y \leq 1
 \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad -1 \leq \sin x + \sin y \leq 1$$

(2)

$x+y=k$ とおく。 $y=-x+k$ を $\sin x + \sin y = \frac{8}{5}$ に代入すると、

$$\begin{aligned}
 \sin x + \sin(-x+k) &= \frac{8}{5} \\
 \Leftrightarrow \sin x - \sin x \cos k + \cos x \sin k &= \frac{8}{5} \\
 \Leftrightarrow (1 - \cos k) \sin x + \sin k \cos x &= \frac{8}{5} \quad \dots \textcircled{1}
 \end{aligned}$$

となる。ここで、 $\cos k = 1$ のとき

$$(\textcircled{1} \text{の左辺}) = 0$$

となり、これを満たす実数 x は存在しないので、 $\cos k \neq 1$ である。ゆえに、

$$\textcircled{1} \Leftrightarrow \sqrt{2-2\cos k} \sin(x+\alpha) = \frac{8}{5} \quad \dots \textcircled{2}$$

と変形できる。このとき、 α は、

$$\cos \alpha = \frac{1 - \cos k}{\sqrt{2 - 2\cos k}}, \quad \sin \alpha = \frac{\sin k}{\sqrt{2 - 2\cos k}}$$

をみたす角である ($\because \cos k \neq 1$)。 x が実数全体を動くとき、 $-1 \leq \sin(x+\alpha) \leq 1$ であるから、 $\textcircled{1}$ を満たす実数 x が存在するための k の条件は、

$$\sqrt{2-2\cos k} \geq \frac{8}{5}$$

となる。よって、これを整理し、

$$\begin{aligned}
 2-2\cos k &\geq \left(\frac{8}{5}\right)^2 \\
 \Leftrightarrow -\frac{7}{25} &\geq \cos k \quad (\leq -1) \\
 \therefore -\frac{24}{25} &\leq \sin k = \sin(x+y) \leq \frac{24}{25}
 \end{aligned}$$

を得る。

$$(\text{答}) \quad -\frac{24}{25} \leq \sin(x+y) \leq \frac{24}{25}$$

(1)

$$\begin{aligned}
 f'(\theta) &= -2\sin 2\theta - 2\sin \theta \\
 &= -2\sin \theta (2\cos \theta + 1) \\
 g'(\theta) &= 2\cos 2\theta + 2\cos \theta \\
 &= 4\cos^2 \theta + 2\cos \theta - 2 \\
 &= 2(2\cos \theta - 1)(\cos \theta + 1)
 \end{aligned}$$

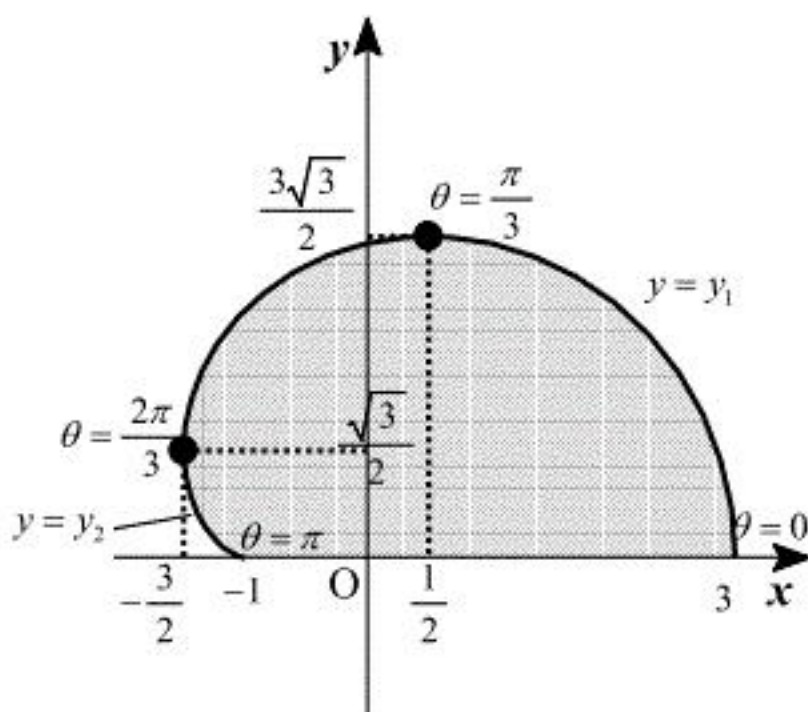
なので $0 \leq \theta \leq \pi$ の範囲での $f(\theta)$, $g(\theta)$ の増減表は以下の通りである。

θ	0	...	$\frac{\pi}{3}$	...	$\frac{2\pi}{3}$	...	π
$f'(\theta)$	0	-	-	-	0	+	0
$f(\theta)$	3	$\searrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	$-\frac{3}{2}$	$\nearrow$	-1
$g'(\theta)$	+	+	0	-	-	-	0
$g(\theta)$	0	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\searrow$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\searrow$	0

(答) 前表

(2)

(1)の増減表より、 $0 \leq \theta \leq \pi$ での 曲線 $x = f(\theta)$, $y = g(\theta)$ のグラフは以下のようになる。



また,

$$\begin{aligned}
 f(-\theta) &= \cos\{2 \cdot (-\theta)\} + 2\cos(-\theta) \\
 &= \cos 2\theta + 2\cos \theta \\
 &= f(\theta) \\
 g(-\theta) &= \sin\{2 \cdot (-\theta)\} + 2\sin(-\theta) \\
 &= -\sin 2\theta - 2\sin \theta \\
 &= -g(\theta)
 \end{aligned}$$

であるから、 $-\pi \leq \theta \leq 0$ の範囲での曲線のグラフは上図を x 軸に関して対称に移したもの

となる。ここで、 $0 \leq \theta \leq \frac{2\pi}{3}$ での y を y_1 , $\frac{2\pi}{3} \leq \theta \leq \pi$ での y を y_2 とおく。上図の斜線部の面積を S とすると,

$$\begin{aligned}
 S &= \int_{-\frac{3}{2}}^3 y_1 dx - \int_{-\frac{3}{2}}^{-1} y_2 dx \\
 &= \int_{\frac{2\pi}{3}}^0 g(\theta) f'(\theta) d\theta - \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} g(\theta) f'(\theta) d\theta \\
 &= \int_{\pi}^0 g(\theta) f'(\theta) d\theta \\
 &= \int_{\pi}^0 (\sin 2\theta + 2\sin \theta)(-2\sin 2\theta - 2\sin \theta) d\theta \\
 &= \int_0^{\pi} (2\sin^2 2\theta + 6\sin 2\theta \sin \theta + 2\sin \theta) d\theta \\
 &= \int_0^{\pi} (1 - \cos 4\theta + 12\sin^2 \theta \cos \theta + 2 - 2\cos 2\theta) d\theta \\
 &= \left[3\theta - \frac{\sin 4\theta}{4} + 4\sin^3 \theta - \sin 2\theta \right]_0^{\pi} \\
 &= 3\pi
 \end{aligned}$$

となり、求める面積は,

$$2S = 6\pi$$

となる。

(答) 6π

(1)

$y = ax + b$ を $4x^2 + 9y^2 = 36$ に代入すると

$$\begin{aligned} 4x^2 + 9(ax + b)^2 &= 36 \\ \Leftrightarrow (4 + 9a^2)x^2 + 18abx + 9b^2 - 36 &= 0 \end{aligned}$$

が得られる。前式を x の 2 次方程式としてみたときの判別式の値を D_1 とおくと、直線と楕円 C が接する条件は

$$\begin{aligned} \frac{D_1}{4} &= 0 \\ \Leftrightarrow (9ab)^2 - (4 + 9a^2)(9b^2 - 36) &= 0 \\ \Leftrightarrow 324a^2 - 36b^2 + 144 &= 0 \\ \Leftrightarrow 4 + 9a^2 &= b^2 \end{aligned}$$

である。

(答) $4 + 9a^2 = b^2$

(2)

[1] 2 本の接線が x 軸または y 軸に平行である場合

楕円 C について $x = 0$ のとき $y = \pm 2$, $y = 0$ のとき $x = \pm 3$ であるから、楕円 C の x 軸または y 軸に平行な接線は

$$x = \pm 3, \quad y = \pm 2$$

である。これらの接線の交点である $(3, 2), (3, -2), (-3, 2), (-3, -2)$ では、楕円 C の 2 接線が直交するので、この 4 点は求める軌跡上にある。

[2] 2 本の接線が x 軸にも y 軸にも平行でない場合

求める軌跡上の点 P を (u, v) とおく。点 P を通る傾き a の直線は

$$y = a(x - p) + q \Leftrightarrow y = ax - ap + q$$

と表せる。この直線が楕円 C に接する条件は、(1)より

$$\begin{aligned} 4 + 9a^2 &= (-ap + q)^2 \\ \Leftrightarrow (9 - p^2)a^2 + 2pqa + 4 - q^2 &= 0 \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

である。よって、点 P で楕円 C の 2 接線が交わるための条件は、①を a の 2 次方程式としてみたときに、異なる 2 実数解を持ちその積が -1 となることである。①の判別式の値を D_2 とおく。この条件は解と係数の関係より

$$\begin{aligned} \frac{D_2}{4} > 0 \text{ かつ } \frac{4 - q^2}{9 - p^2} &= -1 \\ \Leftrightarrow 4p^2 + 9q^2 > 36 \text{ かつ } p^2 + q^2 &= 13 \text{ かつ } p^2 \neq 9 \quad \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

$p^2 + q^2 = 13$ のとき

$$4p^2 + 9q^2 > 4(p^2 + q^2) = 52 > 36$$

であるから

$$\textcircled{2} \Leftrightarrow p^2 + q^2 = 13 \text{ かつ } p^2 \neq 9$$

である。

[1]で求めた軌跡上の 4 点は $p^2 + q^2 = 13$ かつ $p^2 = 9$ とも表せるから、[2]で求めた部分と合わせると、

$$p^2 + q^2 = 13$$

を得る。従って、求める軌跡は円: $x^2 + y^2 = 13$ である。

(答) 円: $x^2 + y^2 = 13$

$X=1$ となるのは3回の試行ですべて1のカードを取り出した場合のみであるから、その確率は

$$\left(\frac{1}{n}\right)^3 = \frac{1}{n^3}$$

である。 $X=k$ ($2 \leq k \leq n$)となるのは、3回の試行ですべて k 以下のカードを取り出した場合のうち、3回の試行ですべて $k-1$ 以下のカードを取り出した場合以外である。よってその確率は

$$\left(\frac{k}{n}\right)^3 - \left(\frac{k-1}{n}\right)^3 = \frac{3k^2 - 3k + 1}{n^3}$$

である。以上より、 X の期待値は

$$\begin{aligned} 1 \cdot \frac{1}{n^3} + \sum_{k=2}^n \left(k \cdot \frac{3k^2 - 3k + 1}{n^3} \right) &= \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n (3k^3 - 3k^2 + k) \\ &= \frac{1}{n^3} \left\{ \frac{3n^2(n+1)^2}{4} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2} \right\} \\ &= \frac{n+1}{4n^2} \{ 3n(n+1) - 2(2n+1) + 2 \} \\ &= \frac{(n+1)(3n-1)}{4n} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{(n+1)(3n-1)}{4n}$$