

仮定より、

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq \pi & \dots \textcircled{1} \\ \sin 2x + \sqrt{3} \sin x - \sqrt{3} \cos x > \frac{3}{2} & \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

である。②より

$$\begin{aligned} \sin 2x + \sqrt{3} \sin x - \sqrt{3} \cos x &> \frac{3}{2} \\ \Leftrightarrow 2 \sin x \cos x + \sqrt{3} \sin x - \sqrt{3} \cos x - \frac{3}{2} &> 0 \\ \Leftrightarrow \left(\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \left(\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) &> 0 \\ \Leftrightarrow \left(\sin x > \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ かつ } \cos x > -\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \text{ または } \left(\sin x < \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ かつ } \right. \\ \left. \cos x < -\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \end{aligned}$$

となる。よって①から

$$\frac{\pi}{3} < x < \frac{2}{3}\pi, \frac{5}{6}\pi < x \leq \pi$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{\pi}{3} < x < \frac{2}{3}\pi, \frac{5}{6}\pi < x \leq \pi$$

【解説】 <<テーマ>>三角関数の不等式

〔解法のポイント〕

三角関数の式の処理能力を測る問題である。三角関数の式は関数の種類($\sin$, $\cos$ など)を統一する、もしくは角度を統一するという定石に基づきまず倍角公式を用いて角を x のみに統一する。そして不等式を解くときの基本は因数分解した形にすることであるから、それに則り因数分解を行う。最後に答を求める際にミスをしやすいため、本問での x の変域に注意し、必要であれば単位円を書いて丁寧に解く。

(1)

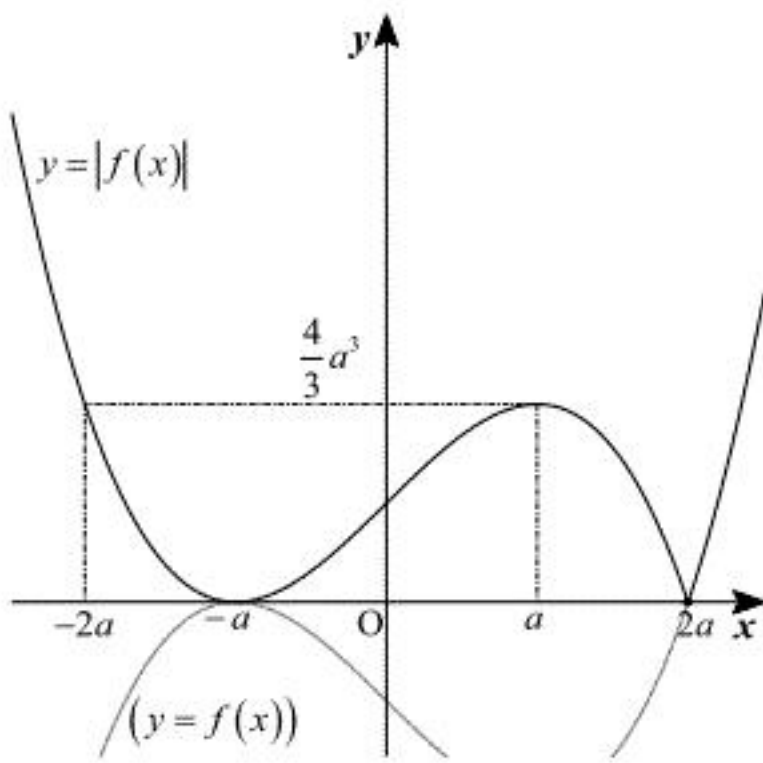
$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - a^2x - \frac{2}{3}a^3 \text{ より,}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= x^2 - a^2 \\ &= (x-a)(x+a) \end{aligned}$$

であるから、次の増減表を得る。($a > 0$ に注意した)

x	$\cdots$	$-a$	$\cdots$	a	$\cdots$	$2a$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\frac{4}{3}a^3$	$\nearrow$	0	$\nearrow$
$ f(x) $	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{4}{3}a^3$	$\searrow$	0	$\nearrow$

これより $y = |f(x)|$ のグラフが*かける。



(答) 前図

(2)

$-1 \leq x \leq 1$ における $|f(x)|$ の最大値 (M とする) を求めたい。

[1] $1 \leq a$ のとき

このとき $-a \leq -1$, $1 \leq a$ となる。

いま $-a \leq x \leq a$ で $|f(x)|$ は単調増加であるから、

$$\begin{aligned} M &= |f(1)| \\ &= -f(1) \\ &= -\left(\frac{1}{3} - a^2 - \frac{2}{3}a^3\right) \\ &= \frac{2}{3}a^3 + a^2 - \frac{1}{3} \end{aligned}$$

となる。

[2] $\frac{1}{2} \leq a < 1$ のとき

このとき $-2a \leq -1 < -a$, $a < 1 \leq 2a$ となる。

(1) で求めたグラフより、 $-a \leq x \leq a$ での $|f(x)|$ の最大値は

$$|f(a)| = \frac{4}{3}a^3 \text{ である。また } |f(-2a)| = |f(a)| = \frac{4}{3}a^3 \text{ であり, そ}$$

して $-2a \leq x \leq -a$, $a \leq x \leq 2a$ において $|f(x)|$ は単調減少であることから、 $-2a \leq -1 \leq x \leq -a$, $a \leq x \leq 1 \leq 2a$ での

$|f(x)|$ の最大値は $\frac{4}{3}a^3$ 以下となる。したがって、[2] の範囲で

$$M = \frac{4}{3}a^3$$

となる。

[3] $a < \frac{1}{2}$ のとき

このとき $-1 < -2a$, $2a < 1$ となる。

[2] で説明したように、 $-2a \leq x \leq 2a$ において $|f(x)|$ の最大値

は $\frac{4}{3}a^3$ となる。 $-1 \leq x < -2a$ において $|f(x)|$ は単調減少であ

るから、この範囲における $|f(x)|$ の最大値は、

$$\begin{aligned} |f(-1)| &= -f(-1) \\ &= \frac{2}{3}a^3 - a^2 + \frac{1}{3} > f(-2a) = \frac{4}{3}a^3 \end{aligned}$$

である。また $2a < x \leq 1$ において $|f(x)|$ は単調増加であるから、この範囲における $|f(x)|$ の最大値は、

$$\begin{aligned} |f(1)| &= f(1) \\ &= -\frac{2}{3}a^3 - a^2 + \frac{1}{3} < |f(-1)| \end{aligned}$$

である。以上より、[3] の範囲における $|f(x)|$ の最大値は、

$$|f(-1)| = \frac{2}{3}a^3 - a^2 + \frac{1}{3}$$

となる。

$$\text{(答) } 1 \leq a \text{ のとき, } \frac{2}{3}a^3 + a^2 - \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{2} \leq a < 1 \text{ のとき, } \frac{4}{3}a^3$$

$$a < \frac{1}{2} \text{ のとき, } \frac{2}{3}a^3 - a^2 + \frac{1}{3}$$

【解説】<<テーマ>>三次関数のグラフと、場合分けが必要な最大値・

最小値の求め方

【解法のポイント】

(1)

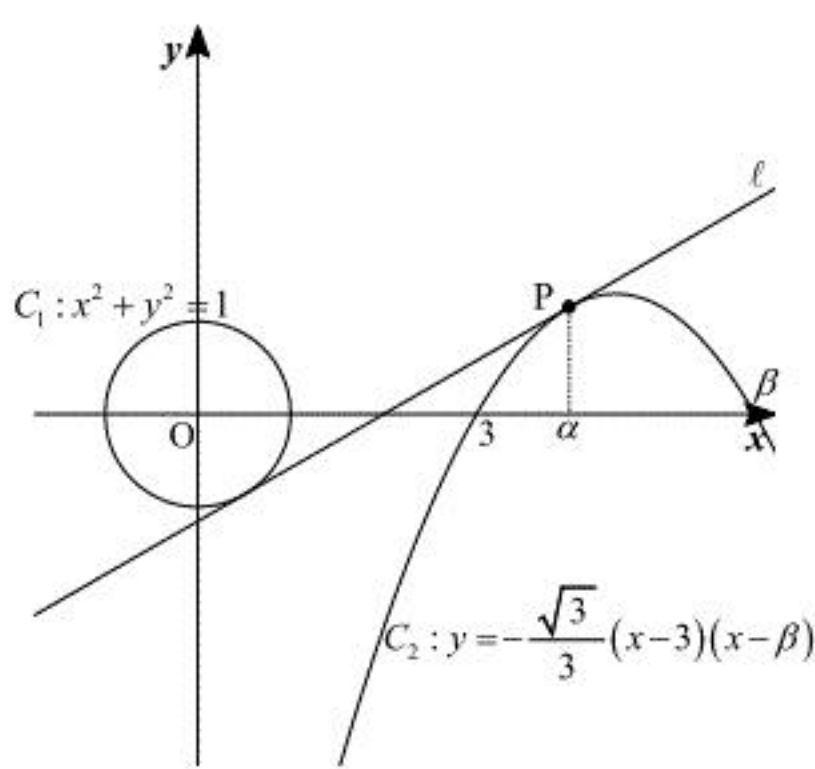
三次関数のグラフの概形をかく問題であるから、微分して増減表をかくてグラフにするのが定石である。増減表をかく際、本問に関しては $a > 0$ という条件があるため場合分けは不要であるが、増減表をかく際は a の値で場合分けが必要となるケースもあるので注意する。

$y = |f(x)|$ などの、関数全体に絶対値がついた関数のグラフをかくときは、まず $y = f(x)$ のグラフを考えて $y < 0$ の部分を x 軸で折り返してかくのが鉄則である。

(2)

極大値をとる a の位置によって最大値をとるとき x の値が変化することから、 a の値の範囲で場合分けする。本問のように場合分けをして最大・最小を求める問題では、漏れなく・重複なく・正確に場合分けすることが重要であるから、グラフをよく見ながら慎重に解き進めていく。 a の値を具体的に何パターンか固定してそれぞれについてグラフを実際にかいてみるのも理解の助けになるだろう。

(1)



曲線 C_1 , C_2 , ℓ は上図のようになる。また ℓ と C_2 の接点 P の x

座標を α とする。ここで ℓ は $x^2 + y^2 = 1$ の $\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ での接線であ

るから、 ℓ の式は、

$$\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y = 1 \Leftrightarrow y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

である。(★)また $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}(x-3)(x-\beta)$ を微分すると、

$$\begin{aligned} y' &= -\frac{\sqrt{3}}{3}(x-3) - \frac{\sqrt{3}}{3}(x-\beta) \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{3}\{2x - (\beta+3)\} \end{aligned}$$

となる。したがって ℓ と C_2 が点 P で接するための条件は、

$$\begin{cases} -\frac{\sqrt{3}}{3}(\alpha-3)(\alpha-\beta) = \frac{\sqrt{3}}{3}\alpha - \frac{2\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{\sqrt{3}}{3}\{2\alpha - (\beta+3)\} = \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (\alpha-4)(-\alpha+2) = 0 \\ \beta = 2\alpha - 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = 2 \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} \alpha = 4 \\ \beta = 6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 4 \\ \beta = 6 \end{cases} \quad (\because \beta > 3)$$

である。以上より、接点の座標は $\left(4, \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 4 - \frac{2\sqrt{3}}{3}\right) = \left(4, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$ であ

り、 β の値は 6 である。

$$(\text{答}) \quad \left(4, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right), \quad \beta = 6$$

(1)[別解](★)から

接線 ℓ と C_2 を連立して、 y を消去すると

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left\{ -\frac{\sqrt{3}}{3}(x-3)(x-\beta) \right\} &= 1 \\ \Leftrightarrow x^2 - (\beta+2)x + 3\beta - 2 &= 0 \end{aligned}$$

となり、この二次方程式の判別式を D とすると $D=0$ となればよ

い。よって

$$\begin{aligned} D &= 0 \\ \Leftrightarrow (\beta+2)^2 - 4(3\beta-2) &= 0 \\ \Leftrightarrow (\beta-2)(\beta-6) &= 0 \end{aligned}$$

となり、 $\beta > 3$ から $\beta=6$ となる。これを上式に代入して

$$\begin{aligned} x^2 - 8x + 16 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-4)^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= 4 \end{aligned}$$

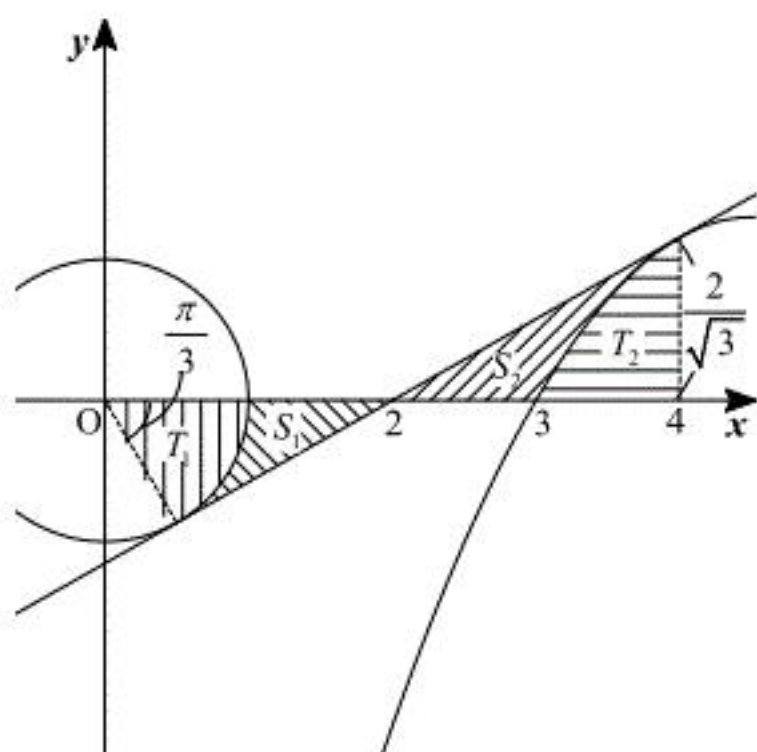
となるから、 ℓ と C_2 の接点の座標は

$$\left(4, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \left(4, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right), \quad \beta = 6$$

(2)



面積 S_1 , S_2 は、上図に示した領域の面積である。また上図のように

面積 T_1 , T_2 をおく。すると、

$$\begin{cases} T_1 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{\pi}{3} \\ T_2 = -\frac{\sqrt{3}}{3} \int_3^4 (x-3)(x-6) dx = -\frac{\sqrt{3}}{3} \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 18x \right]_3^4 \\ S_1 + T_1 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ S_2 + T_2 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} T_1 = \frac{\pi}{6} \\ T_2 = \frac{7\sqrt{3}}{18} \\ S_1 + T_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ S_2 + T_2 = \frac{2\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

となる。したがって、

$$\begin{cases} S_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6} \\ S_2 = \frac{2\sqrt{3}}{3} - \frac{7\sqrt{3}}{18} = \frac{5\sqrt{3}}{18} \end{cases}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \begin{cases} S_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6} \\ S_2 = \frac{5\sqrt{3}}{18} \end{cases}$$

【解説】<<テーマ>>共通接線と面積

【解法のポイント】

(1)

共通接線の問題である。まず $x^2 + y^2 = r^2$ の円周上の点 (p, q) における接線の方程式は $px + qy = r^2$ で表されることは知っておく必要がある。本解では C_1 に接する接線 ℓ と C_2 に接する接線 ℓ の式をそれぞれ求め、それらが一致するということを利用して。別解では C_1 に接する接線 ℓ の方程式を求め、それと C_2 が接することから判別式の値が 0 になることを利用している。どちらの解法も使えるようにしておきたい。

(2)

直接求めるのが大変な部分の面積を、足し引きして間接的に求めることができるかを問う問題である。このような問題はグラフや図を描き、円や三角形など面積を求めるのが容易な図形を見つけ出すのがポイントである。