

〔解答〕

(1)

$$f(x) = \log \left\{ (1-x)^{1-x} (1+x)^{1+x} \right\}$$

$$= (1-x) \log(1-x) + (1+x) \log(1+x)$$

より

$$f'(x) = -\log(1-x) + (1-x) \frac{-1}{1-x} + \log(1+x) + (1+x) \frac{1}{1+x}$$

$$= \log \frac{1+x}{1-x}$$

となる。ここで、 $\frac{1+x}{1-x} = -1 + \frac{2}{1-x}$ が $-1 < x < 1$ において単調増加であることに注意すると、増

減表は以下のようになる。

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

従って $f(x)$ は区間 $-1 < x < 1$ において $x=0$ において最小値 0 をとる。

(答) 0

(2)

$$g(x) = \cos x + \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{3} \cos 3x$$

より

$$g'(x) = -(\sin x + \sin 2x + \sin 3x)$$

$$= -(\sin 3x + \sin x + \sin 2x)$$

$$= -(2 \sin 2x \cos x + \sin 2x)$$

$$= -\sin 2x (2 \cos x + 1)$$

であるから、 $g'(x) = 0$ となるとき、 $0 \leq x \leq 2\pi$ より

$$\sin 2x = 0 \quad \text{または} \quad \cos x = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore x = 0, \frac{\pi}{2}, \frac{2}{3}\pi, \pi, \frac{4}{3}\pi, \frac{3}{2}\pi, 2\pi$$

である。従って増減表は以下のようになる。

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{2}{3}\pi$	$\cdots$	π
$g'(x)$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0
$g(x)$	$\frac{11}{6}$	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$-\frac{5}{12}$	$\searrow$	$-\frac{5}{6}$

x	$\cdots$	$\frac{4}{3}\pi$	$\cdots$	$\frac{3}{2}\pi$	$\cdots$	2π
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0
$g(x)$	$\nearrow$	$-\frac{5}{12}$	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$\frac{11}{6}$

従って $g(x)$ は区間 $0 \leq x \leq 2\pi$ で最大値 $\frac{11}{6}$ ，最小値 $-\frac{5}{6}$ をとる。

(答) 最大値 $\frac{11}{6}$ ，最小値 $-\frac{5}{6}$

〔解答〕

$$f(x) = e^x + \frac{6}{e^x + 1} \text{ とすると,}$$

$$\begin{aligned} f(x) - 4 &= e^x + \frac{6}{e^x + 1} - 4 \\ &= \frac{e^{2x} - 3e^x + 2}{e^x + 1} \\ &= \frac{(e^x - 1)(e^x - 2)}{e^x + 1} \end{aligned}$$

より $1 \leq e^x \leq 2$ で $f(x) \geq 4$, $e^x \leq 1$ または $2 \leq e^x$ で $f(x) \leq 4$ が成立する。 $1 \leq e^x \leq 2 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq \log 2$ より, 求める面積は

$$\begin{aligned} &\int_0^{\log 2} \{4 - f(x)\} dx \\ &= \int_0^{\log 2} \left(4 - e^x - \frac{6}{e^x + 1}\right) dx \\ &= \int_0^{\log 2} \left\{4 - e^x - 6 \left(1 - \frac{e^x}{e^x + 1}\right)\right\} dx \\ &= \left[4x - e^x - 6(x - \log|e^x + 1|)\right]_0^{\log 2} \\ &= 6\log 3 - 8\log 2 - 1 \end{aligned}$$

となる。

(答) $6\log 3 - 8\log 2 - 1$

〔解答〕

(1)

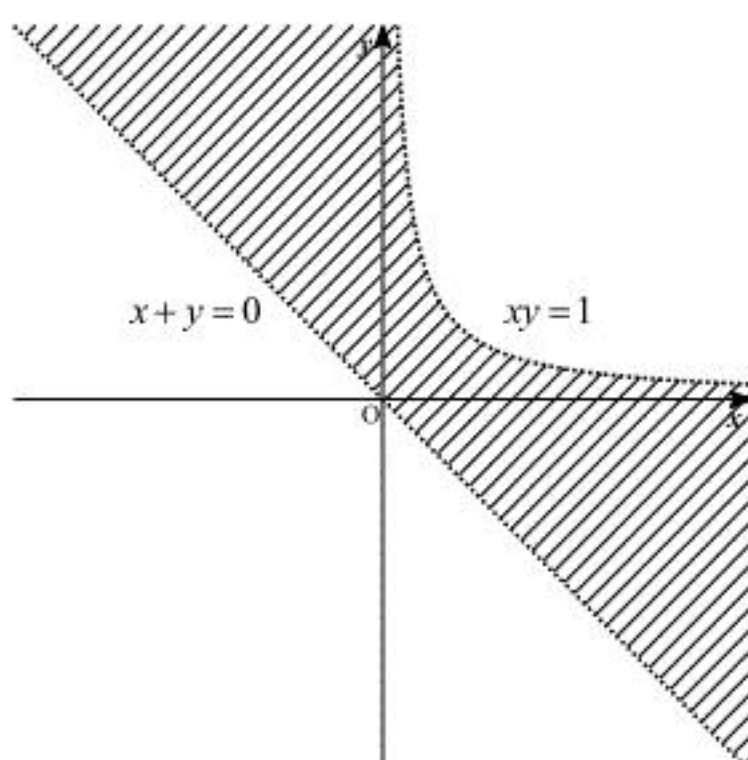
$$\begin{aligned}
 & A^2 - T(A)A + D(A)E \\
 &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - (a+d) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + (ad-bc) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} a^2+bc & (a+d)b \\ (a+d)c & bc+d^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} (a+d)a & (a+d)b \\ (a+d)c & (a+d)d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} \\
 &= O
 \end{aligned}$$

(証明終)

(2)

$$D(X) < 0 \text{ かつ } T(X) > 0 \Leftrightarrow xy - 1 < 0 \text{ かつ } x + y > 0$$

であるから、求める領域を図示すると、以下のようになる(境界は含まない)。



(答) 前図

(3)

X が逆行列をもたないとき

$$D(X) = 0$$

$$\therefore y = \frac{1}{x} \quad \dots \textcircled{1}$$

である。従って(1)より

$$X^2 - T(X)X = O$$

$$\therefore X^2 = \left(x + \frac{1}{x}\right)X$$

となるから

$$X^{2n} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^{2n-1} X$$

$$\begin{aligned}
 \therefore T(X^{2n}) &= \left(x + \frac{1}{x}\right)^{2n} \\
 &= \left(x^2 + \frac{1}{x^2} + 2\right)^n \quad \dots \textcircled{2}
 \end{aligned}$$

となる。ここで①式より $x \neq 0$ であり $x^2 > 0$ であるから、②式において(相加平均) $\geq$ (相乗平均)の関係より

$$\begin{aligned}
 T(X^{2n}) &\geq \left(2\sqrt{x^2 \cdot \frac{1}{x^2}} + 2\right)^n \quad \dots \textcircled{3} \\
 &= 4^n
 \end{aligned}$$

が成り立つ。 $x = \pm 1$ のとき③式において等号が成立するから、 $T(X^{2n})$ の最小値は 4^n となる。

(答) 4^n

【解答】

(1)

$$f(t) = 4t^3 - x^2t$$

$$f'(t) = 12t^2 - x^2$$

であるから、 $f'(t) = 0$ のとき $t = \pm \frac{\sqrt{3}}{6}x$ となる。よって x が正 ($x \geq 2$) であることに注意す

ると増減表は以下のようになる。

t	...	$-\frac{\sqrt{3}}{6}x$	...	$\frac{\sqrt{3}}{6}x$	...
$f'(t)$	+	0	-	0	+
$f(t)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

ここで、極大値を取る $t = -\frac{\sqrt{3}}{6}x$ が区間 $-1 \leq t \leq 1$ 内に存在するかしないかで場合分けをする。

[1] $-1 \leq -\frac{\sqrt{3}}{6}x$ のとき

このとき $2 \leq x \leq 2\sqrt{3}$ であり、極小値を取る $t = \frac{\sqrt{3}}{6}x$ も区間 $-1 \leq t \leq 1$ 内に存在する。

従って、増減表より $M(x)$ は $f\left(-\frac{\sqrt{3}}{6}x\right)$ と $f(1)$ のどちらか大きい方であるが

$$\begin{aligned} f\left(-\frac{\sqrt{3}}{6}x\right) &= \frac{\sqrt{3}}{9}x^3 \\ &\geq \frac{\sqrt{3}}{9} \cdot 2^3 \\ &= \frac{8\sqrt{3}}{9} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(1) &= -x^2 + 4 \\ &\leq -2^2 + 4 \\ &= 0 \end{aligned}$$

より

$$f(1) < f\left(-\frac{\sqrt{3}}{6}x\right)$$

となるから

$$\begin{aligned} M(x) &= f\left(-\frac{\sqrt{3}}{6}x\right) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{9}x^3 \end{aligned}$$

である。

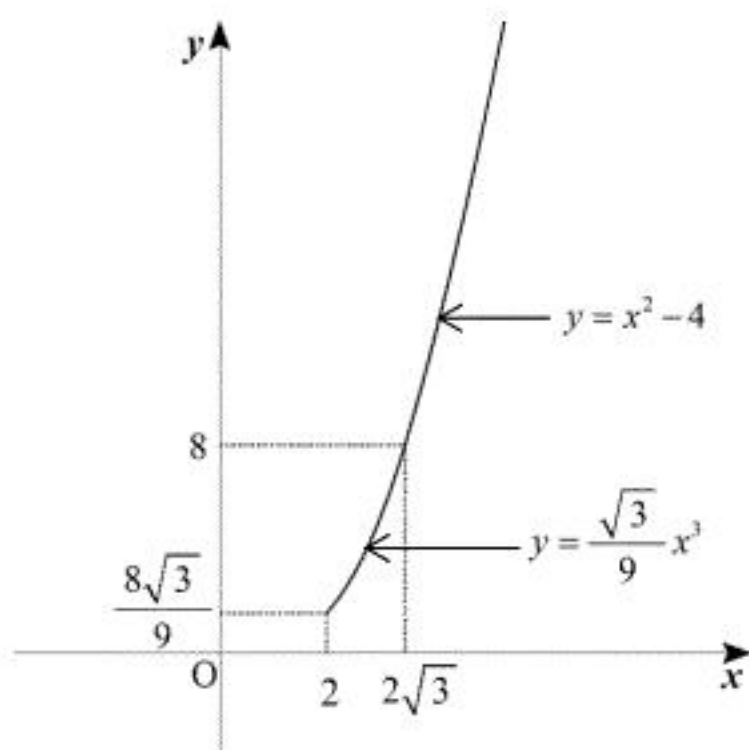
[2] $-\frac{\sqrt{3}}{6}x < -1$ のとき

このとき $2\sqrt{3} < x$ である。増減表より $f(t)$ は区間 $-1 \leq t \leq 1$ で単調減少であるから

$$\begin{aligned} M(x) &= f(-1) \\ &= x^2 - 4 \end{aligned}$$

である。

以上[1], [2]より、 $y = M(x)$ の概形は以下のようになる。



(答) 前図

(2)

曲線 $y = M(x)$ と直線 $y = 10$ の交点の x 座標は

$$x^2 - 4 = 10 \Leftrightarrow x = \sqrt{14} \quad (\because x \geq 2)$$

より $\sqrt{14}$ であるから、求める面積は

$$\begin{aligned} &\int_0^2 \left(10 - \frac{8\sqrt{3}}{9}\right) dx + \int_2^{2\sqrt{3}} \left(10 - \frac{\sqrt{3}}{9}x^3\right) dx + \int_{2\sqrt{3}}^{\sqrt{14}} \{10 - (x^2 - 4)\} dx \\ &= \left[\left(10 - \frac{8\sqrt{3}}{9}\right)x \right]_0^2 + \left[10x - \frac{\sqrt{3}}{36}x^4 \right]_2^{2\sqrt{3}} + \left[14x - \frac{1}{3}x^3 \right]_{2\sqrt{3}}^{\sqrt{14}} \\ &= \frac{28}{3}\sqrt{14} - \frac{16}{3}\sqrt{3} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{28}{3}\sqrt{14} - \frac{16}{3}\sqrt{3}$

〔解答〕

$f(n) = 5^{2n-1} + 7^{2n-1} + 23^{2n-1}$ とおく。 $35 = 5 \cdot 7$ であり、5, 7 は互いに素であるから、
 すべての正の整数 n に対して $f(n)$ が 5 でも 7 でも割り切れること
 を示せばよい。以下、これを数学的帰納法で示す。

[1] $n=1$ のとき

$$f(1) = 5 + 7 + 23 = 35 = 5 \cdot 7$$

は 5 でも 7 でも割り切れるので、よい。

[2] $n=k$ のとき成り立つと仮定して、 $n=k+1$ のとき

仮定より、 $f(k) = 5^{2k-1} + 7^{2k-1} + 23^{2k-1}$ は 5 でも 7 でも割り切れるので、とくに、

$$7^{2k-1} + 23^{2k-1} \text{ は } 5 \text{ の倍数} \quad \cdots \text{①}$$

$$5^{2k-1} + 23^{2k-1} \text{ は } 7 \text{ の倍数} \quad \cdots \text{②}$$

であることがわかる。さて、

$$\begin{aligned} f(k+1) &= 5^{2(k+1)-1} + 7^{2(k+1)-1} + 23^{2(k+1)-1} \\ &= 5^{2k+1} + 7^{2k+1} + 23^{2k+1} \\ &= 5^{2k+1} + 7^2 \cdot 7^{2k-1} + 23^2 \cdot 23^{2k-1} \\ &= 5^{2k+1} + (5 \cdot 9 + 4) \cdot 7^{2k-1} + (5 \cdot 105 + 4) \cdot 23^{2k-1} \\ &= 5(5^{2k} + 9 \cdot 7^{2k-1} + 105 \cdot 23^{2k-1}) + 4(7^{2k-1} + 23^{2k-1}) \end{aligned}$$

と変形できるので、①に注意すると、 $f(k+1)$ は 5 で割り切れることがわかる。同様に、

$$\begin{aligned} f(k+1) &= 5^{2k+1} + 7^{2k+1} + 23^{2k+1} \\ &= 5^2 \cdot 5^{2k-1} + 7^{2k+1} + 23^2 \cdot 23^{2k-1} \\ &= (7 \cdot 3 + 4) \cdot 5^{2k-1} + 7^{2k+1} + (7 \cdot 75 + 4) \cdot 23^{2k-1} \\ &= 7(3 \cdot 5^{2k-1} + 7^{2k} + 75 \cdot 23^{2k-1}) + 4(5^{2k-1} + 23^{2k-1}) \end{aligned}$$

と変形すると、②から、 $f(k+1)$ は 7 でも割り切れることがわかる。

以上、[1], [2]より、すべての正の整数 n に対して、 $5^{2n-1} + 7^{2n-1} + 23^{2n-1}$ が 35 で割り切れることが示された。

(証明終)

〔別解〕

$35 = 5 \cdot 7$ であり、5 と 7 は互いに素であるから、与式が 5 でも 7 でも割り切れることを証明すればよい。以下、5 を法とすると、

$$\begin{aligned} &5^{2n-1} + 7^{2n-1} + (23)^{2n-1} \\ &\equiv 0 + 2^{2n-1} + (-2)^{2n-1} \\ &= 0 + 2^{2n-1} - 2^{2n-1} \quad (\because 2n-1 \text{ は奇数}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

となるため、与式は 5 で割り切れる。同様に、以下 7 を法とすると

$$\begin{aligned} &5^{2n-1} + 7^{2n-1} + (23)^{2n-1} \\ &\equiv (-2)^{2n-1} + 0 + 2^{2n-1} \\ &= -2^{2n-1} + 0 + 2^{2n-1} \quad (\because 2n-1 \text{ は奇数}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

となるため、与式は 7 でも割り切れる。よって題意は示された。

(証明終)