

(1)

$a+b+c+d=10$ を満たす自然数 a, b, c, d の組を考えるには、10 個の $\bigcirc$ の間に仕切りを 3 個入れて 4 つの組を作ること考えればよい。つまり、4 つの組それぞれの $\bigcirc$ の個数が 1 個以上になるようにとり、各組の $\bigcirc$ の個数を左から順に a, b, c, d とすれば問題の条件を満たす。仕切りを入れられるところは 9 か所であるから、求める場合の数は、

$${}_9C_3 = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 84 \text{ (通り)}$$

となる。

(答) 84 通り

(2)

(1) の a, b, c, d に対して、符号が正か負かを考えればよいから、求める場合の数は、

$$84 \cdot 2^4 = 1344 \text{ (通り)}$$

となる。

(答) 1344 通り

(3)

a, b, c, d のうちの 0 の個数で場合分けして考える。

[1] 0 が 0 個のとき

(2) の場合であるから、1344 通りとなる。

[2] 0 が 1 個のとき

(1) と同様の考え方をして、仕切りの個数を 2 個とすればよい。 a, b, c, d のうちどれが 0 となるかと符号について考えると、求める場合の数は、

$${}_9C_2 \cdot {}_4C_1 \cdot 2^3 = 1152 \text{ (通り)}$$

となる。

[3] 0 が 2 個のとき

(1) と同様の考え方をして、仕切りの個数を 1 個とすればよい。 a, b, c, d のうちどれが 0 となるかと符号について考えると、求める場合の数は、

$${}_9C_1 \cdot {}_4C_2 \cdot 2^2 = 216 \text{ (通り)}$$

となる。

[4] 0 が 3 個のとき

a, b, c, d のうちいずれ 1 つが 10 または -10 になればよいから 8 通りである。

以上より、求める場合の数は、

$$1344 + 1152 + 216 + 8 = 2720 \text{ (通り)}$$

となる。

(答) 2720 通り

(1)

正四面体の辺について $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{d}$ とおく。与えられた条件より,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AE} &= \frac{1}{2}\vec{b} \\ \overrightarrow{AF} &= \frac{1}{2}\vec{c} \\ \overrightarrow{AG} &= (1-t)\vec{b} + t\vec{d} \\ \overrightarrow{AH} &= (1-u)\vec{c} + u\vec{d}\end{aligned}$$

が得られる。これらを用いて $\overrightarrow{EG}$, $\overrightarrow{EF}$ を計算すると,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{EG} &= \overrightarrow{AG} - \overrightarrow{AE} \\ &= \left(\frac{1}{2} - t\right)\vec{b} + t\vec{d} \\ \overrightarrow{EF} &= \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AE} \\ &= -\frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}\end{aligned}$$

が得られる。また, $\overrightarrow{EH}$ を計算すると,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{EH} &= \overrightarrow{AH} - \overrightarrow{AE} \\ &= -\frac{1}{2}\vec{b} + (1-u)\vec{c} + u\vec{d}\end{aligned}$$

が得られる。 $\overrightarrow{EG}$, $\overrightarrow{EF}$ は平行でないから, 4 点 E, F, G, H が同一平面上にあるとき, 実数 x, y を用いて,

$$\overrightarrow{EH} = x\overrightarrow{EG} + y\overrightarrow{EF}$$

と表せる。これを用いると,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{EH} &= x\overrightarrow{EG} + y\overrightarrow{EF} \\ \Leftrightarrow -\frac{1}{2}\vec{b} + (1-u)\vec{c} + u\vec{d} &= x\left\{\left(\frac{1}{2} - t\right)\vec{b} + t\vec{d}\right\} + y\left\{-\frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}\right\} \\ \Leftrightarrow -\frac{1}{2}\vec{b} + (1-u)\vec{c} + u\vec{d} &= \left\{\left(\frac{1}{2} - t\right)x - \frac{y}{2}\right\}\vec{b} + \frac{y}{2}\vec{c} + xt\vec{d}\end{aligned}$$

となる。 $\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ は一次独立であるから, 係数を比較して

$$\begin{cases} -\frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2} - t\right)x - \frac{y}{2} \\ 1 - u = \frac{y}{2} \\ u = xt \end{cases}$$

が得られる。 $t \neq 0$ だから第 3 式より $x = \frac{u}{t}$ である。これと第 2 式を用いて第 1 式の x, y を消去すると,

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2} &= \left(\frac{1}{2} - t\right)\frac{u}{t} - (1 - u) \\ &= \frac{u}{2t} - 1 \\ \therefore t &= u\end{aligned}$$

が示される。

(証明終)

(2)

$\overrightarrow{FH}$, $\overrightarrow{HG}$ を計算すると,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{FH} &= \overrightarrow{AH} - \overrightarrow{AF} \\ &= \left(\frac{1}{2} - u\right)\vec{c} + u\vec{d} \\ \overrightarrow{HG} &= \overrightarrow{AG} - \overrightarrow{AH} \\ &= (1-t)\vec{b} - (1-u)\vec{c} + (t-u)\vec{d}\end{aligned}$$

となる。 $t = u$ として (1) の $\overrightarrow{EG}$, $\overrightarrow{EF}$ と $\overrightarrow{FH}$, $\overrightarrow{HG}$ を $EF^2 + FH^2 + HG^2 + GE^2$ に代入すると,

$$\begin{aligned}EF^2 + FH^2 + HG^2 + GE^2 \\ = \left|-\frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{c})\right|^2 + \left|\left(\frac{1}{2} - u\right)\vec{c} + u\vec{d}\right|^2 + \left|(1-u)(\vec{b} - \vec{c})\right|^2 + \left|\left(\frac{1}{2} - u\right)\vec{b} + u\vec{d}\right|^2\end{aligned}$$

が得られる。ここで, ABCD は正四面体だから,

$$|\vec{b}| = |\vec{c}| = |\vec{d}| = 1$$

となる。また, $|\vec{b} - \vec{c}| = |\overrightarrow{CB}| = 1$ も成り立つ。さらに, $\vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{d} = \vec{b} \cdot \vec{d}$ の値について,

$$\begin{aligned}\vec{b} \cdot \vec{c} &= |\vec{b}| \cdot |\vec{c}| \cdot \cos \frac{\pi}{3} \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

となる。これらを用いると, $EF^2 + FH^2 + HG^2 + GE^2$ の式は,

$$\begin{aligned}EF^2 + FH^2 + HG^2 + GE^2 \\ = \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{2} - u\right)^2 + 2\left(\frac{1}{2} - u\right)u \cdot \frac{1}{2} + u^2 + (1-u)^2 + \left(\frac{1}{2} - u\right)^2 + 2\left(\frac{1}{2} - u\right)u \cdot \frac{1}{2} + u^2 \\ = 3u^2 - 3u + \frac{7}{4} \\ = 3\left(u - \frac{1}{2}\right)^2 + 1\end{aligned}$$

となる。 $0 < u < 1$ であるから, $EF^2 + FH^2 + HG^2 + GE^2$ の範囲は

$$1 \leq EF^2 + FH^2 + HG^2 + GE^2 < \frac{7}{4}$$

となる。

(答) $1 \leq EF^2 + FH^2 + HG^2 + GE^2 < \frac{7}{4}$

(1)

$f_1(x), f_2(x)$ をそれぞれ x で微分すると,

$$f_1'(x) = -4x - 1$$

$$f_2'(x) = 2ax - a(b+1)$$

が得られる。 $f_1'(1) = f_2'(1)$ のとき,

$$-5 = 2a - a(b+1)$$

$$\therefore a - ab = -5$$

となる。

(答) $a - ab = -5$

(2)

まず, x の値で場合分けして考える。

[1] $x \leq 1$ のとき

$g(x)$ は,

$$g(x) = \int_{-\frac{3}{2}}^x f_1(t) dt$$

となる。これを x で微分すると,

$$g'(x) = f_1(x)$$

$$= -2x^2 - x + 3$$

$$= -(2x+3)(x-1)$$

となる。したがって, 増減表は以下のようになる。

x	...	$-\frac{3}{2}$	...	1
$g'(x)$	-	0	+	
$g(x)$		0		

以上より, この範囲における最小値は 0 となる。

[2] $x > 1$ のとき

$g(x)$ は,

$$g(x) = \int_{-\frac{3}{2}}^1 f_1(t) dt + \int_1^x f_2(t) dt$$

となる。これを x で微分すると, $\int_{-\frac{3}{2}}^1 f_1(t) dt$ は定数項であるから,

$$g'(x) = f_2(x)$$

$$= ax^2 - a(b+1)x + ab$$

$$= a(x-1)(x-b)$$

となる。したがって, 増減表は以下のようになる。

x	1	...	b	...
$g'(x)$		-	0	+
$g(x)$			$g(b)$	

よって, この範囲における最小値は,

$$\begin{aligned} g(b) &= \int_{-\frac{3}{2}}^1 f_1(x) dx + \int_1^b f_2(x) dx \\ &= \int_{-\frac{3}{2}}^1 (-2x^2 - x + 3) dx + \int_1^b a(x-1)(x-b) dx \\ &= \left[-\frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 3x \right]_{-\frac{3}{2}}^1 - a \cdot \frac{(b-1)^3}{6} \\ &= \frac{125}{24} - \frac{a}{6}(b-1)^3 \end{aligned}$$

となる。さらに(1)の結果を用いて整理すると

$$\frac{125}{24} - \frac{a}{6}(b-1)^3 = \frac{125}{24} - \frac{5}{6}(b-1)^2$$

となる。

次に, [1], [2]におけるそれぞれの最小値を比較すると, $0 < \frac{125}{24} - \frac{5}{6}(b-1)^2$ となるのは,

$$\begin{aligned} 0 &< \frac{125}{24} - \frac{5}{6}(b-1)^2 \\ \Leftrightarrow (b-1)^2 &< \frac{25}{4} \\ \therefore 1 &< b < \frac{7}{2} \quad (\because b > 1) \end{aligned}$$

のときである。以上より,

$$1 < b < \frac{7}{2} \text{ のとき最小値は } 0$$

$$\frac{7}{2} \leq b \text{ のとき最小値は } \frac{125}{24} - \frac{5}{6}(b-1)^2$$

となる。

$$(答) \begin{cases} 1 < b < \frac{7}{2} \text{ のとき最小値は } 0 \\ \frac{7}{2} \leq b \text{ のとき最小値は } \frac{125}{24} - \frac{5}{6}(b-1)^2 \end{cases}$$