

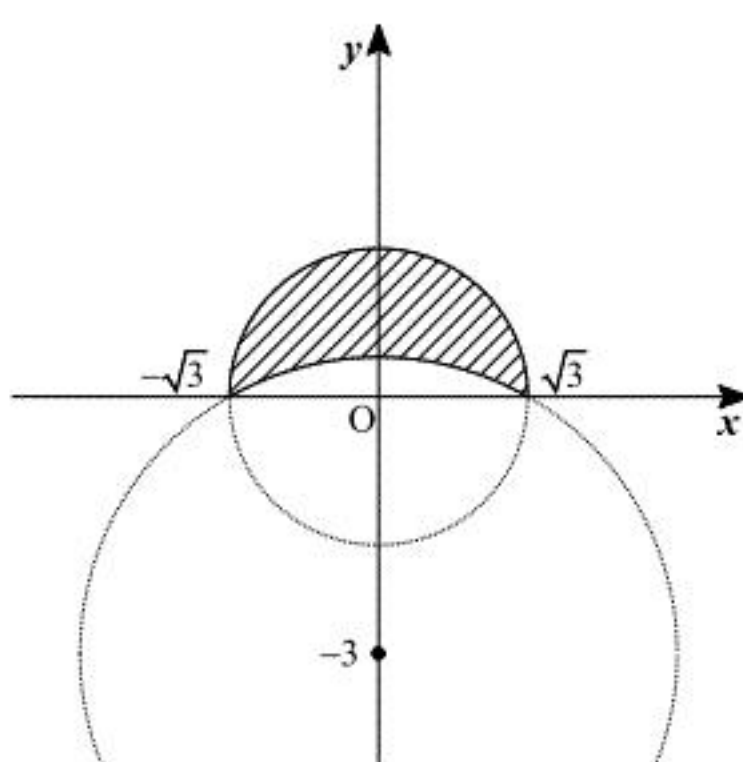
(1)

与えられた式を変形すると、

$$x^2 + y^2 + 6y \geq 3$$

$$\Leftrightarrow x^2 + (y+3)^2 \geq 12$$

となる。したがって、領域 D を図示すると以下の斜線部分になる。ただし、境界(実線)を含む。



(答) 前図

(2)

求める立体は、半径 $\sqrt{3}$ の球から内部の回転体を除いたものである。球の体積は、

$$\frac{4}{3}\pi(\sqrt{3})^3 = 4\sqrt{3}\pi$$

である。 $x^2 + (y+3)^2 = 12$ の式を y について整理すると、

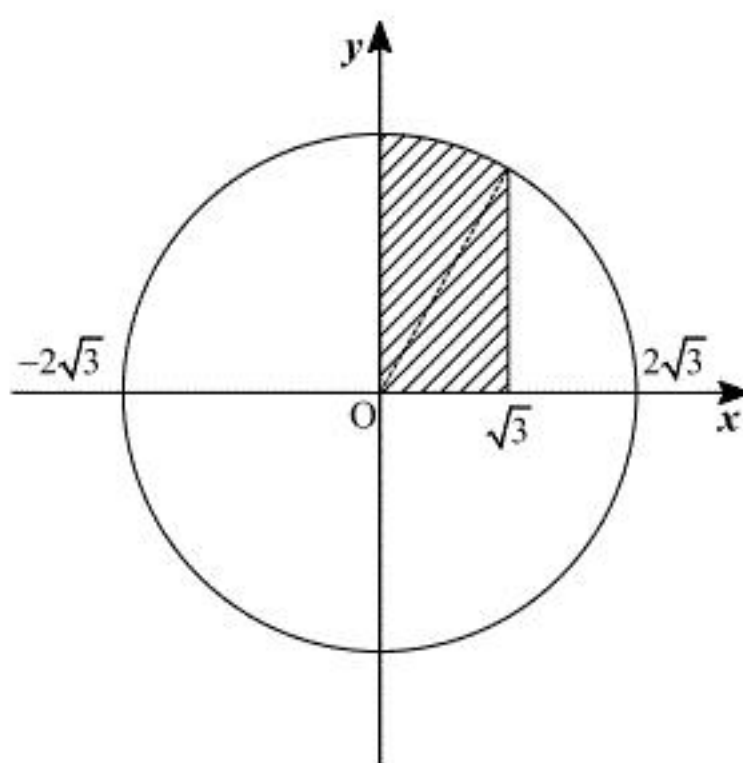
$$x^2 + (y+3)^2 = 12$$

$$\Leftrightarrow y = -3 \pm \sqrt{12 - x^2}$$

となる。したがって、内部の回転体の体積の式を立式すると、

$$\begin{aligned} \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \pi (\sqrt{12 - x^2} - 3)^2 dx &= 2\pi \int_0^{\sqrt{3}} (21 - x^2 - 6\sqrt{12 - x^2}) dx \\ &= 2\pi \int_0^{\sqrt{3}} (21 - x^2) dx - 12\pi \int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{12 - x^2} dx \end{aligned}$$

となる。ここで、 $\int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{12 - x^2} dx$ について計算する。



上の図を考えると、 $\int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{12 - x^2} dx$ の値は斜線部の面積に等しく、

$$\begin{aligned} \int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{12 - x^2} dx &= \pi (2\sqrt{3})^2 \cdot \frac{1}{12} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot 3 \\ &= \pi + \frac{3}{2}\sqrt{3} \end{aligned}$$

となる。したがって、内部の回転体の体積は、

$$\begin{aligned} \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \pi (\sqrt{12 - x^2} - 3)^2 dx &= 2\pi \left[21x - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^{\sqrt{3}} - 12\pi \left(\pi + \frac{3}{2}\sqrt{3} \right) \\ &= -12\pi^2 + 22\sqrt{3}\pi \end{aligned}$$

である。以上より、求める体積は

$$4\sqrt{3}\pi - (-12\pi^2 + 22\sqrt{3}\pi) = 12\pi^2 - 18\sqrt{3}\pi$$

となる。

(答) $12\pi^2 - 18\sqrt{3}\pi$

(1)

$f(x)$ を x について微分すると,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2^x - x \cdot 2^x \cdot \log 2}{(2^x)^2} \\ &= \frac{1 - (\log 2)x}{2^x} \end{aligned}$$

となる。さらに、二階微分すると,

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{-(\log 2) \cdot 2^x - \{1 - (\log 2)x\} \cdot 2^x \cdot \log 2}{(2^x)^2} \\ &= \frac{-2 \log 2 + (\log 2)^2 x}{2^x} \end{aligned}$$

となる。ここで、 $g(x) = f'(c)(x-c) + f(c) - f(x)$ とおく。 $g(x)$ を x について微分すると,

$$g'(x) = f'(c) - f'(x)$$

となる。二階微分すると,

$$\begin{aligned} g''(x) &= -f''(x) \\ &= (\log 2) \frac{2 - (\log 2)x}{2^x} \end{aligned}$$

が得られる。 $1 > \log 2$ であるから、 $0 \leq x \leq 2$ の範囲において

$$g''(x) > 0$$

となる。したがって、 $g'(x)$ は $0 \leq x \leq 2$ の範囲において単調増加する。 $x=c$ のとき,

$$\begin{aligned} g'(c) &= f'(c) - f'(c) \\ &= 0 \end{aligned}$$

である。以上より、 $g(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	0	...	c	...	2
$g'(x)$		-	0	+	
$g(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

以上より,

$$\begin{aligned} g(x) &\geq g(c) \\ \Leftrightarrow g(x) &\geq f'(c)(c-c) + f(c) - f(c) \\ \Leftrightarrow g(x) &\geq 0 \end{aligned}$$

となる。また、等号が成立するのは $x=c$ のときである。

(証明終)

(2)

$x_1, x_2, \dots, x_n$ は 0 以上の実数で $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 2$ となる。したがって、 x_i ($i=1, 2, \dots, n$) について,

$$0 \leq x_i \leq 2$$

が成立している。したがって、(1)の結果より各 x_i について

$$f(x_i) \leq f'(c)(x_i - c) + f(c)$$

が得られる。これを足し合わせると,

$$\begin{aligned} f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n) &\leq f'(c)(x_1 + x_2 + \dots + x_n - nc) + nf(c) \\ \Leftrightarrow f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n) &\leq f'(c)(2 - nc) + nf(c) \end{aligned}$$

が成立する。ここで、 $c = \frac{2}{n}$ ととれば、 n は自然数だから、 $0 \leq c \leq 2$ を満たしており,

$$\begin{aligned} f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n) &\leq f'\left(\frac{2}{n}\right)\left(2 - n \cdot \frac{2}{n}\right) + nf\left(\frac{2}{n}\right) \\ \Leftrightarrow f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n) &\leq nf\left(\frac{2}{n}\right) \end{aligned}$$

が得られる。等号が成立するときは,

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n = \frac{2}{n}$$

のときである。

(証明終)

6

(1)

$$\begin{cases} 4P+Q=A \\ P+Q=E \end{cases}$$

であるから、上の式から下の式を引くと、

$$\begin{aligned} 3P &= (A-E) \\ \therefore P &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。また、行列 Q は、

$$\begin{aligned} Q &= E - P \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。

$$(答) \quad P = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, Q = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(2)

PQ を計算すると、

$$\begin{aligned} PQ &= \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。 QP を計算すると、

$$\begin{aligned} QP &= \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。

$$(答) \quad PQ = QP = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(3)

P^2 を計算すると、

$$\begin{aligned} P^2 &= \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= P \end{aligned}$$

が得られる。したがって、

$$\begin{aligned} P^n &= P^2 \cdot P^{n-2} \\ &= P^{n-1} \\ &= P \end{aligned}$$

となる。同様にして、

$$\begin{aligned} Q^2 &= \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= Q \end{aligned}$$

となる。したがって、

$$\begin{aligned} Q^n &= Q^{n-1} \\ &= Q \end{aligned}$$

も得られる。(2)の結果と合わせて、 A^n を計算すると、

$$\begin{aligned} A^n &= (4P+Q)^n \\ &= 4^n P + Q \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4^n+2 & -2 \cdot 4^n+2 \\ -4^n+1 & 2 \cdot 4^n+1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。

$$(答) \quad A^n = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4^n+2 & -2 \cdot 4^n+2 \\ -4^n+1 & 2 \cdot 4^n+1 \end{pmatrix}$$

(4)

A^n の行列式 $\det A^n$ を計算すると、

$$\frac{4^n+2}{3} \cdot \frac{2 \cdot 4^n+1}{3} - \frac{-2 \cdot 4^n+2}{3} \cdot \frac{-4^n+1}{3} = 4^n$$

となる。したがって、逆行列 B_n は、

$$B_n = \frac{1}{4^n} \cdot \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \cdot 4^n+1 & 2 \cdot 4^n-2 \\ 4^n-1 & 4^n+2 \end{pmatrix}$$

となる。以上より、各極限值は

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot 4^n+1}{3 \cdot 4^n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{1}{4^n}}{3} \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} b_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot 4^n-2}{3 \cdot 4^n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{2}{4^n}}{3} \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} c_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n-1}{3 \cdot 4^n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{4^n}}{3} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} d_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n+2}{3 \cdot 4^n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{2}{4^n}}{3} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

となる。

$$(答) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{2}{3}, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \frac{2}{3}, \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \frac{1}{3}, \lim_{n \rightarrow \infty} d_n = \frac{1}{3}$$

(1)

 $\alpha = 1 + \sqrt{2}$ のとき,

$$\begin{aligned}
 \sqrt{2\alpha+1} &= \sqrt{3+2\sqrt{2}} \\
 &= \sqrt{(1+\sqrt{2})^2} \\
 &= 1+\sqrt{2} \\
 &= \alpha
 \end{aligned}$$

となる。 $f(x) = \sqrt{2x+1}$ とおくと, $f(\alpha) = \alpha$, $a_{n+1} = f(b_n)$ が成立している。ここで, $a_{n+1} - \alpha$ を計算すると,

$$\begin{aligned}
 a_{n+1} - \alpha &= f(b_n) - f(\alpha) \\
 &= \sqrt{2b_n+1} - \sqrt{2\alpha+1} \\
 &= \frac{\sqrt{2b_n+1} + \sqrt{2\alpha+1}}{\sqrt{2b_n+1} + \sqrt{2\alpha+1}} (\sqrt{2b_n+1} - \sqrt{2\alpha+1}) \\
 &= \frac{1}{f(b_n) + \alpha} \{(2b_n+1) - (2\alpha+1)\} \\
 &= \frac{2}{f(b_n) + \alpha} (b_n - \alpha)
 \end{aligned}$$

が成立する。したがって,

$$|a_{n+1} - \alpha| = \left| \frac{2}{f(b_n) + \alpha} \right| |b_n - \alpha|$$

となる。 $a_1, b_1 > 0$ であり, 定義式より $a_n, b_n > 0$ が成立するから,

$$f(b_n) = \sqrt{2b_n+1} > 1$$

が言える。したがって,

$$|a_{n+1} - \alpha| \leq \left(\frac{2}{1+\alpha} \right) |b_n - \alpha|$$

が成立する。

(証明終)

(2)

与えられた式の対称性から,

$$|b_{n+1} - \alpha| \leq \left(\frac{2}{1+\alpha} \right) |a_n - \alpha|$$

が同様に言える。十分に大きい n に対して

$$|a_n - \alpha| \leq \left(\frac{2}{1+\alpha} \right) |b_{n-1} - \alpha| \leq \left(\frac{2}{1+\alpha} \right)^2 |a_{n-2} - \alpha| \leq \cdots \leq \left(\frac{2}{1+\alpha} \right)^{n-m} |a_m - \alpha|$$

が成立する。ただし, m は 1 または 2 とする。つまり, a_m とは $a_1 = 1, a_2 = \sqrt{7}$ のいずれかである。このとき, $|a_m - \alpha|$ はある正の実数となっている。また,

$$0 < \frac{2}{1+\alpha} < 1$$

であるから, $0 \leq |a_n - \alpha| \leq \left(\frac{2}{1+\alpha} \right)^{n-m} |a_m - \alpha|$ について $n \rightarrow \infty$ とすれば, はさみうちの原理より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n - \alpha| = 0$$

が得られる。したがって,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$$

となる。同様にして,

$$|b_n - \alpha| \leq \left(\frac{2}{1+\alpha} \right) |a_{n-1} - \alpha| \leq \left(\frac{2}{1+\alpha} \right)^2 |b_{n-2} - \alpha| \leq \cdots \leq \left(\frac{2}{1+\alpha} \right)^{n-m} |b_m - \alpha|$$

が成立する。したがって, はさみうちの原理により

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |b_n - \alpha| = 0$$

が得られる。したがって,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \alpha$$

となる。

(答) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1 + \sqrt{2}, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1 + \sqrt{2}$