$\boxed{1}$

(1)

$DE=2,\ EF=3,\ FD=4$ を満たす三角形DEFを考える。このとき，三角形DEFについての余弦定理より，

$$\cos\angle D=\frac{2^2+4^2-3^2}{2\cdot2\cdot4}=\frac{11}{16}$$
$$\cos\angle E=\frac{2^2+3^2-4^2}{2\cdot2\cdot3}=-\frac{1}{4}$$
$$\cos\angle F=\frac{3^2+4^2-2^2}{2\cdot3\cdot4}=\frac{7}{8}$$

であるから，$0<\angle D,\ \angle E,\ \angle F<\pi$ であることに注意すると，

$$\cos\angle F>\cos\angle D>\cos\angle E$$
$$\therefore \angle F<\angle D<\angle E$$

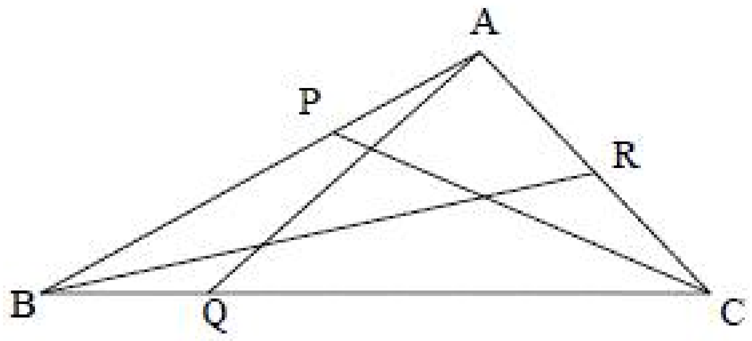
となる。よって，三角形DEFの頂点Eを頂点A，頂点Fを頂点B，頂点Dを頂点Cと置き換えて出来る三角形ABCは題意を満たす。以上より，

$$\cos\angle A=\cos\angle E=-\frac{1}{4}$$
$$\cos\angle B=\cos\angle F=\frac{7}{8}$$

である。

(答) $\cos\angle A=-\dfrac{1}{4},\ \cos\angle B=\dfrac{7}{8}$

(2)



(1)の結果より，$AB=3,\ BC=4,\ CA=2$ であり，

$$\cos\angle C=\cos\angle D=\frac{11}{16}$$

である。$AP=BQ=CR=x$ とおくと，点Rが辺CA上の点であることから

$$0\leqq x\leqq 2 \qquad \cdot\cdot\cdot ①$$

を満たす。このとき，三角形ABQについての余弦定理より，

$$AQ^2=3^2+x^2-2\cdot3\cdot x\cdot\frac{7}{8}=x^2-\frac{21}{4}x+9 \qquad \cdot\cdot\cdot ②$$

となり，同様にして，三角形BCRと三角形CAPについての余弦定理より，

$$BR^2=4^2+x^2-2\cdot4\cdot x\cdot\frac{11}{16}=x^2-\frac{11}{2}x+16 \qquad \cdot\cdot\cdot ③$$

$$CP^2=2^2+x^2-2\cdot2\cdot x\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)=x^2+x+4 \qquad \cdot\cdot\cdot ④$$

となる。②，③，④より，

$$AQ^2+BR^2+CP^2=3x^2-\frac{39}{4}x+29$$
$$=3\left(x-\frac{13}{8}\right)^2+\frac{1349}{64}$$

となるが，これは①の範囲において $x=0$ のとき最大値29を，$x=\dfrac{13}{8}$ のとき最小値 $\dfrac{1349}{64}$ をとる。

(答) 最大値: 29，最小値: $\dfrac{1349}{64}$

$\boxed{2}$

(1)

4 人の男子の中から任意に 1 人を選び，この選んだ男子を A さんとする。A さんの位置を固定して，残りの 7 人を円形のテーブルに配置するときの並べ方を考える。A さん以外の 7 人の並び方は全部で 7! 通りあり，このうち男女が交互になる並び方，すなわち A さんから時計回りに女子，男子，女子，男子，女子，男子，女子となるような並び方は，女子の順番が 4! 通り，男子の順番が 3! 通り考えられることから，4! 3! 通りある。以上より，求める確率は

$$\frac{4!\,3!}{7!}=\frac{1}{35}$$

である。

（答）$\frac{1}{35}$

(2)

(1)の結果より，求める確率は

$$ {}_3C_1\cdot\frac{1}{35}\cdot\left(1-\frac{1}{35}\right)^2+{}_3C_2\cdot\left(\frac{1}{35}\right)^2\cdot\left(1-\frac{1}{35}\right)=\frac{102}{1225}$$

である。

（答）$\frac{102}{1225}$

$\boxed{3}$

$$\theta=\frac{x}{180^\circ}\cdot\pi\ [\mathrm{rad}] \qquad \cdots ①$$

とおくと，側面の展開図の扇型の弧の長さは10θである。よって，円錐の底面の半径を$r\ (r>0)$とおくと，側面の扇型の弧の長さと底面の円周の長さが等しいことから，

$$2\pi r=10\theta$$

$$\Leftrightarrow \theta=\frac{\pi r}{5} \qquad \cdots ②$$

となる。ここで，円錐の高さをhとおくと，三角錐の母線の長さが10であることから

$$0<h<10 \qquad \cdots ③$$

であり，また，三平方の定理より

$$r^2+h^2=10^2$$
$$\Leftrightarrow r^2=100-h^2 \qquad \cdots ④$$

となるので，円錐の体積をVとおくと，Vは

$$V=\frac{1}{3}\pi r^2 h$$
$$=\frac{1}{3}\pi\left(100-h^2\right)h$$

とhの式で表せる。ここで，

$$\frac{dV}{dh}=\frac{1}{3}\pi\left(100-3h^2\right)$$
$$=\frac{1}{3}\pi\left(10-\sqrt{3}h\right)\left(10+\sqrt{3}h\right)$$

より，③の範囲におけるVの増減は次表のようになる。

h	0	$\cdots$	$\frac{10}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	10
$\frac{dV}{dh}$	／	+	0	−	／
V	／	↗	極大	↘	／

よって，Vは$h=\frac{10}{\sqrt{3}}$のときに最大値

$$\frac{1}{3}\pi\left\{100-\left(\frac{10}{\sqrt{3}}\right)^2\right\}\frac{10}{\sqrt{3}}=\frac{2000\sqrt{3}}{27}\pi$$

をとり，これが求める円錐の体積の最大値である。また，このとき，④より

$$r^2=100-\left(\frac{10}{\sqrt{3}}\right)^2$$
$$\Leftrightarrow r=\frac{10\sqrt{6}}{3}\ (\because r>0)$$

であるから，①，②より

$$x=\frac{180^\circ}{\pi}\cdot\theta$$
$$=\frac{180^\circ}{\pi}\cdot\frac{\pi}{5}\cdot\frac{10\sqrt{6}}{3}$$
$$=120\sqrt{6}^\circ$$

である。

(答) 体積の最大値: $\frac{2000\sqrt{3}}{27}\pi$，そのときの$x$: $120\sqrt{6}^\circ$