$\boxed{4}$

(1)

aの値で場合分けして考える。

[1] $a=0$のとき

$$\int_0^{\pi}\sin^2 ax dx=\int_0^{\pi}\sin^2 0 dx$$
$$=0$$

となる。

[2] $a\neq 0$のとき，

$$\int_0^{\pi}\sin^2 ax dx=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}(1-\cos 2ax)dx$$
$$=\frac{1}{2}\left[x-\frac{1}{2a}\sin 2ax\right]_0^{\pi}$$
$$=\frac{1}{2}\left(\pi-\frac{\sin 2a\pi}{2a}\right)$$

となる。

(答) $a=0$のとき0，$a\neq 0$のとき$\frac{1}{2}\left(\pi-\frac{\sin 2a\pi}{2a}\right)$

(2)

$f(x)$の定義域は$x>0$であり，導関数は

$$f'(x)=\frac{x\cdot\frac{1}{x}-1\cdot\log x}{x^2}$$
$$=\frac{1-\log x}{x^2}$$

であるから，$f(x)$の増減は次表のようになる。

x	0	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$	／	$+$	0	$-$
$f(x)$	／	↗	極大	↘

ここで$e<59<61$であるから，前表より，

$$f(59)>f(61)$$
$$\Leftrightarrow \frac{\log 59}{59}>\frac{\log 61}{61}$$
$$\Leftrightarrow 61\log 59>59\log 61$$
$$\Leftrightarrow \log 59^{61}>\log 61^{59}$$
$$\Leftrightarrow 59^{61}>61^{59}$$

となる。

(答) 増減：前表，大小関係：$59^{61}>61^{59}$

(3)

$k>1$のとき，

$$\int_1^{e^{\frac{1}{k}}}\frac{\log x}{x^k}dx=\int_1^{e^{\frac{1}{k}}}\left(\frac{x^{1-k}}{1-k}\right)'\cdot\log x dx$$
$$=\left[\frac{x^{1-k}}{1-k}\cdot\log x\right]_1^{e^{\frac{1}{k}}}-\int_1^{e^{\frac{1}{k}}}\frac{x^{1-k}}{1-k}\cdot\frac{1}{x}dx$$
$$=\frac{e^{\frac{1-k}{k}}}{(1-k)k}-\left[\frac{x^{1-k}}{(1-k)^2}\right]_1^{e^{\frac{1}{k}}}$$
$$=\frac{e^{\frac{1-k}{k}}}{(1-k)}\cdot\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{1-k}\right)+\frac{1}{(1-k)^2}$$

であるから，

$$\lim_{k\to\infty}k^2\int_1^{e^{\frac{1}{k}}}\frac{\log x}{x^k}dx=\lim_{k\to\infty}\left\{\frac{e^{\frac{1}{k}-1}}{\left(\frac{1}{k}-1\right)}\cdot\left(1-\frac{1}{\frac{1}{k}-1}\right)+\frac{1}{\left(\frac{1}{k}-1\right)^2}\right\}$$
$$=\frac{e^{0-1}}{0-1}\cdot\left(1-\frac{1}{0-1}\right)+\frac{1}{(0-1)^2}$$
$$=1-\frac{2}{e}$$

となる。

(答) $1-\frac{2}{e}$

$\boxed{5}$

(1)

$6x+4y=k$ とおくと，

$$y=\frac{k}{4}-\frac{3}{2}x$$

となる。上式で表される直線と与えられた楕円が共有点をもつとき，以下の 2 次方程式

$$4x^2+\left(\frac{k}{4}-\frac{3}{2}x\right)^2=r^2$$
$$\Leftrightarrow 100x^2-12kx+k^2-16r^2=0$$

は実数解をもつ。したがって，この方程式の判別式を D とすると，$D\geqq 0$ となるから，

$$\frac{D}{4}\geqq 0$$

$$\Leftrightarrow 36k^2-100\cdot\left(k^2-16r^2\right)\geqq 0$$

$$\Leftrightarrow k^2-25r^2\leqq 0$$
$$\therefore -5r\leqq k\leqq 5r\ (\because r>0)$$

より，

$$-5r\leqq 6x+4y\leqq 5r$$

となる。

(答) $-5r\leqq 6x+4y\leqq 5r$

(2)

x, y がすべての実数を取りうるとき，ある非負の実数 r を用いて

$$4x^2+y^2=r^2 \qquad \cdot\cdot\cdot ①$$

と書ける。$r>0$ のとき，(1)の結果より

$$-5r\leqq 6x+4y\leqq 5r$$

が成り立ち，$r=0$，すなわち $x=0,\ y=0$ のときもこの式は成り立つ。したがって，$4x^2+y^2+15$ の符号が常に正であることに注意すると，x, y が①を満たしながら動くとき，

$$\frac{5-5r}{r^2+15}\leqq\frac{6x+4y+5}{4x^2+y^2+15}\leqq\frac{5+5r}{r^2+15}$$

となる。よって，

$$m(r)=\frac{5-5r}{r^2+15},\ M(r)=\frac{5+5r}{r^2+15}$$

とおくと，r が $r\geqq 0$ の範囲を動くときの $m(r)$ の最小値が求める最小値であり，同様に $M(r)$ の最大値が求める最大値となる。ここで，

$$m'(r)=\frac{-5\cdot\left(r^2+15\right)-(5-5r)\cdot 2r}{\left(r^2+15\right)^2}$$
$$=\frac{5r^2-10r-75}{\left(r^2+15\right)^2}$$
$$=\frac{5(r-5)(r+3)}{\left(r^2+15\right)^2}$$

$$M'(r)=\frac{5\cdot\left(r^2+15\right)-(5+5r)\cdot 2r}{\left(r^2+15\right)^2}$$
$$=\frac{-5r^2-10r+75}{\left(r^2+15\right)^2}$$
$$=\frac{-5(r-3)(r+5)}{\left(r^2+15\right)^2}$$

より，$r\geqq 0$ における $m(r)$ と $M(r)$ の増減は次表のようになる。

r	0	$\cdots$	5	$\cdots$
$m'(r)$		$-$	0	$+$
$m(r)$		↘	極小	↗

r	0	$\cdots$	3	$\cdots$
$M'(r)$		$+$	0	$-$
$M(r)$		↗	極大	↘

以上より，求める最大値は

$$M(3)=\frac{5}{6}$$

であり，最小値は

$$m(5)=-\frac{1}{2}$$

である。

(答) 最大値: $\frac{5}{6}$，最小値: $-\frac{1}{2}$

$\boxed{6}$

(1)

$$f(x)=-x-\log(1-x)$$

とおくと，

$$0 \leqq x \leqq \frac{1}{2} \qquad \cdots ①$$

のもとで

$$f'(x)=-1+\frac{1}{1-x}$$
$$=\frac{x}{1-x}$$
$$\geqq 0$$

となるので，①において $f(x)$ は単調増加関数であり，

$$f(0)=0$$

より，①において常に

$$f(0) \geqq 0 \Leftrightarrow -x \geqq \log(1-x) \qquad \cdots ②$$

が成り立つ。また，

$$g(x)=\log(1-x)-\left(-x^2-x\right)$$

とおくと，①のもとで

$$g'(x)=-\frac{1}{1-x}+2x+1$$
$$=\frac{2x\left(\frac{1}{2}-x\right)}{1-x}$$
$$\geqq 0$$

となるので，①において $g(x)$ は単調増加関数であり，

$$g(0)=0$$

より，①において常に

$$g(0) \geqq 0 \Leftrightarrow \log(1-x) \geqq -x^2-x \qquad \cdots ③$$

が成り立つ。よって②，③より，①において

$$-x^2-x \leqq \log(1-x) \leqq -x$$

が成り立つことが示された。

(証明終)

(2)

n が自然数のとき，$k=1, 2, \ldots, n$ について

$$\frac{0}{2n^2}<\frac{k}{2n^2} \leqq \frac{n}{2n^2}$$
$$\Leftrightarrow 0<\frac{k}{2n^2} \leqq \frac{1}{2n} \leqq \frac{1}{2}$$

が成り立つことに注意すると，$1-\frac{k}{2n^2}>0\ (k=1, 2, \ldots, n)$ より

$$\log a_n=\log\left(1-\frac{1}{2n^2}\right)\left(1-\frac{2}{2n^2}\right)\cdots\left(1-\frac{n}{2n^2}\right)$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\log\left(1-\frac{k}{2n^2}\right)$$

であり，また(1)の結果より，$k=1, 2, \ldots, n$ について

$$-\left(\frac{k}{2n^2}\right)^2-\frac{k}{2n^2} \leqq \log\left(1-\frac{k}{2n^2}\right) \leqq -\frac{k}{2n^2}$$

が成り立つので，

$$\sum_{k=1}^{n}\left\{-\left(\frac{k}{2n^2}\right)^2-\frac{k}{2n^2}\right\} \leqq \log a_n \leqq \sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{k}{2n^2}\right) \qquad \cdots ④$$

となる。ここで，区分求積法より，

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{-\left(\frac{k}{2n^2}\right)^2-\frac{k}{2n^2}\right\}=-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4n}\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2-\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)$$
$$=-0\cdot\int_0^1 x^2dx-\frac{1}{2}\int_0^1 xdx$$
$$=-\frac{1}{4}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{k}{2n^2}\right)=-\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)$$
$$=-\frac{1}{2}\int_0^1 xdx$$
$$=-\frac{1}{4}$$

となるから，④についてはさみうちの原理より，

$$\lim_{n\to\infty}\log a_n=-\frac{1}{4}$$

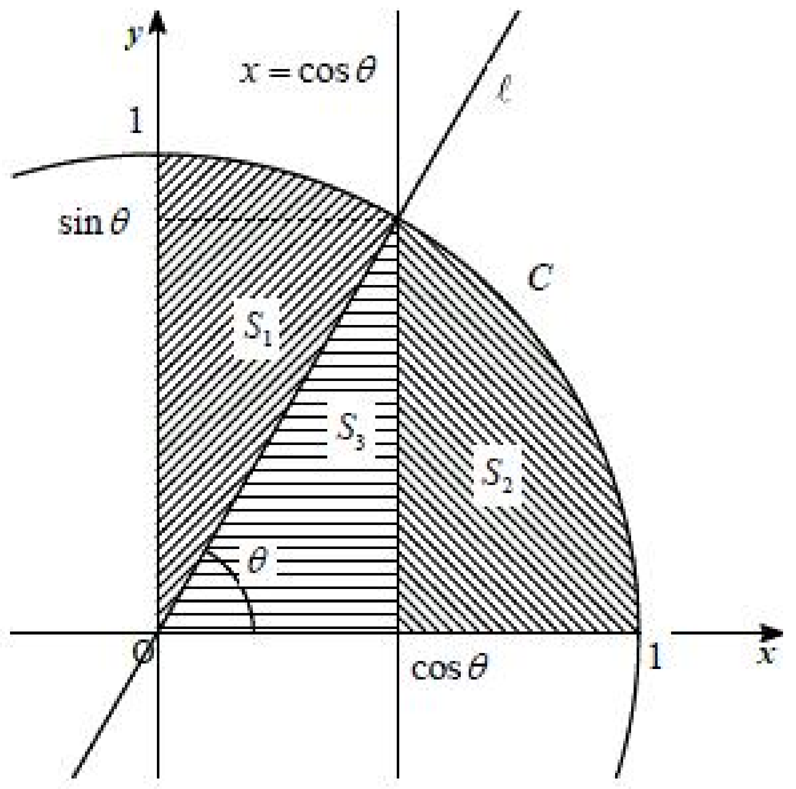
となる。以上より，

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}e^{\log a_n}=e^{\lim_{n\to\infty}\log a_n}=e^{-\frac{1}{4}}$$

である。

(答) $e^{-\frac{1}{4}}$

$\boxed{7}$



S_1, S_2, S_3 は前図の各部分の面積である。S_1 は半径1，中心角 $\frac{\pi}{2}-\theta$ の扇形の面積であるから，

$$S_1=\pi\cdot\frac{\frac{\pi}{2}-\theta}{2\pi}=\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}$$

であり，S_3 は底辺 $\cos\theta$，高さ $\sin\theta$ の三角形の面積であるから，

$$S_3=\frac{\sin\theta\cos\theta}{2} \qquad \cdot\cdot\cdot ①$$

である。ここで，$S_1+S_2+S_3$ は半径1，中心角 $\frac{\pi}{2}$ の扇形の面積であるから，

$$S_1+S_2+S_3=\frac{\pi}{4} \qquad \cdot\cdot\cdot ②$$

となる。以上より，

$$\begin{aligned} S_2&=\frac{\pi}{4}-S_1-S_3\\ &=\frac{\theta-\sin\theta\cos\theta}{2} \end{aligned}$$

を得る。

(答) $S_1=\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2},\ S_2=\frac{\theta-\sin\theta\cos\theta}{2}$

(2)

(1)の結果より，

$$\begin{aligned} &S_1=S_2\\ &\Leftrightarrow \frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}=\frac{\theta-\sin\theta\cos\theta}{2}\\ &\Leftrightarrow 2\sin\theta\cos\theta-4\theta+\pi=0\\ &\Leftrightarrow \sin 2\theta-4\theta+\pi=0 \end{aligned}$$

となるから，

$$f(\theta)=\sin 2\theta-4\theta+\pi$$

とおき，$f(\theta)=0$ となる θ が $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ の範囲に存在することを示せばよい。

$$f'(\theta)=2\cos 2\theta-4$$

であり，$2\cos 2\theta \leqq 2$ より常に $f'(\theta)<0$ となるので，$f(\theta)$ は単調減少関数である。$f(\theta)$ は明らかに θ について連続であり，また

$$f(0)=\pi>0$$
$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\pi<0$$

であるから，$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ の範囲に1つ $f(\theta)=0$ を満たす θ が存在する。よって，題意は示された。

(証明終)

(3)

(1)の結果より，

$$\begin{aligned} S_1-S_3&=\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}-\frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta\\ &=\frac{1}{4}(\pi-2\theta)-\frac{1}{4}\sin 2\theta\\ &=\frac{1}{4}(\pi-2\theta)-\frac{1}{4}\sin(\pi-2\theta)\\ &=\frac{1}{4}\{(\pi-2\theta)-\sin(\pi-2\theta)\} \end{aligned}$$

と変形できる。$\pi-2\theta=t$ とおくと，$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ より $0<t<\pi$ であり，

$$S_1-S_3=\frac{1}{4}(t-\sin t)$$

と表せる。ここで $g(t)=t-\sin t$ とおくと，$0<t<\pi$ のとき

$$g'(t)=1-\cos t>0$$

となるから，$g(t)$ は単調増加であり，$g(0)=0$ より，$0<t<\pi$ の範囲において常に $g(t)>0$ となる。したがって，$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ の範囲において常に

$$S_1-S_3>0$$
$$\therefore S_1>S_3$$

であるから，$S_1=S_2=S_3$ となる θ は存在しない。

(証明終)