

(1)

 $x = \alpha, \beta$  は 2 次方程式

$$-2x^2 = kx - 2$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + kx - 2 = 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

の解である。したがって、解と係数の関係より

$$\alpha + \beta = -\frac{k}{2}, \alpha\beta = -1$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \alpha + \beta = -\frac{k}{2}, \alpha\beta = -1$$

(2)

①式の判別式を  $D$  とすると

$$D = k^2 + 16 > 0$$

となるから、①式は異なる二つの実数解を持ち、 $\alpha \neq \beta$  である。また、 $y = -2x^2$  を微分して $y' = -4x$  となるから、点  $P$  における  $C$  の接線の方程式は

$$y = -4\alpha(x - \alpha) - 2\alpha^2$$

$$\Leftrightarrow y = -4\alpha x + 2\alpha^2$$

となる。同様にして点  $Q$  における  $C$  の接線の方程式は

$$y = -4\beta(x - \beta) - 2\beta^2$$

$$\Leftrightarrow y = -4\beta x + 2\beta^2$$

となる。したがって、点  $R$  の  $x$  座標は

$$-4\alpha x + 2\alpha^2 = -4\beta x + 2\beta^2$$

$$\Leftrightarrow 4(\beta - \alpha)x + 2(\alpha^2 - \beta^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow 4(\beta - \alpha)x - 2(\beta - \alpha)(\alpha + \beta) = 0$$

$$\Leftrightarrow 4(\beta - \alpha)\left(x - \frac{\alpha + \beta}{2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\alpha + \beta}{2} \quad (\because \alpha \neq \beta)$$

$$\therefore x = -\frac{k}{4} \quad (\because (1))$$

となり、点  $R$  の  $y$  座標は

$$y = -4\alpha \cdot \frac{\alpha + \beta}{2} + 2\alpha^2 = -2\alpha\beta = 2$$

となる。したがって点  $R$  は直線  $y = 2$  上にある。また、 $k$  は任意の実数であるから逆も成り立つ。したがって、点  $R$  の軌跡は

$$\text{直線 } y = 2$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \text{直線 } y = 2$$

(1)

メネラウスの定理より,  $0 < x < 1, 0 < y < 1$  に注意して

$$\begin{aligned} \frac{YB}{OY} \cdot \frac{ZX}{BZ} \cdot \frac{AO}{XA} &= 1 \\ \Leftrightarrow \frac{1-y}{y} \cdot \frac{s}{1-s} \cdot \frac{1}{1-x} &= 1 \\ \Leftrightarrow s(1-y) &= y(1-s)(1-x) \\ \Leftrightarrow s(1-xy) &= y(1-x) \\ \therefore s &= \frac{y(1-x)}{1-xy} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad s = \frac{y(1-x)}{1-xy}$$

(2)

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OZ} &= (1-s)\overrightarrow{OX} + s\overrightarrow{OB} \\ &= x(1-s)\overrightarrow{OA} + s\overrightarrow{OB} \end{aligned}$$

となり,

$$\begin{cases} \overrightarrow{OA} = 2\overrightarrow{OC} \\ \overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OD} \end{cases}$$

であるから,

$$\overrightarrow{OZ} = 2x(1-s)\overrightarrow{OC} + 2s\overrightarrow{OD}$$

となる。ここで点Zは三角形OABの内部にあり, 線分CDは直線CDのうち三角形OABの内部の部分であるから, 点Zが直線CD上にある条件を求めればよい。よって求める条件は

$$2x(1-s) + 2s = 1$$

となり, (1)の結果を用いると

$$\begin{aligned} 2x \cdot \left( 1 - \frac{y(1-x)}{1-xy} \right) + 2 \cdot \frac{y(1-x)}{1-xy} &= 1 \\ \Leftrightarrow 2x(1-y) + 2y(1-x) &= 1-xy \\ \Leftrightarrow 3xy - 2x - 2y + 1 &= 0 \end{aligned}$$

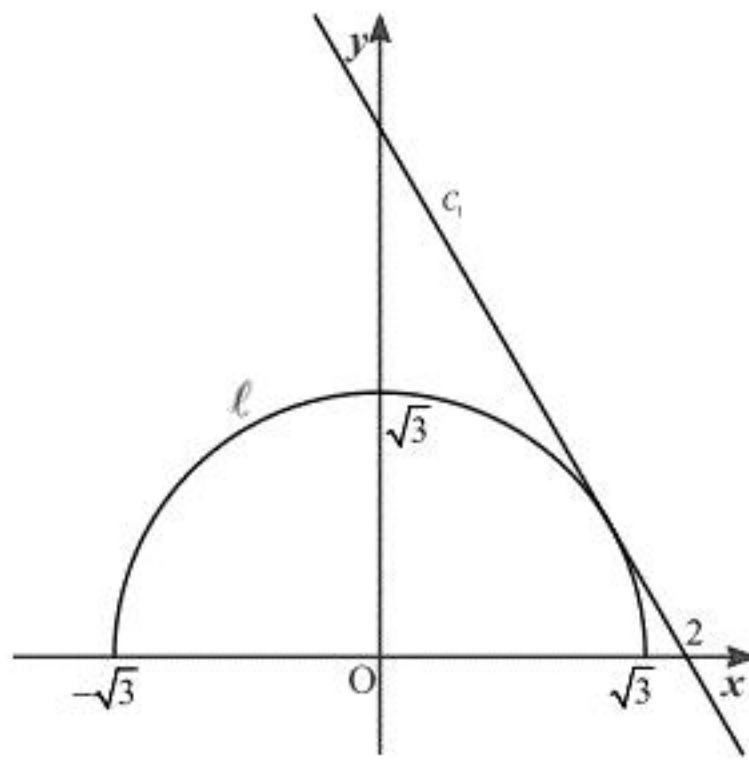
となる。

$$(\text{答}) \quad 3xy - 2x - 2y + 1 = 0$$

3

(1)

半円  $C_1$  と直線  $\ell$  を図示すると、下図のようになる。



直線  $\ell$  は点  $(2, 0)$  を通り  $y$  軸に平行でなく、上図より傾きは負であるから、傾きを  $m (< 0)$  とおくと

$$y = m(x - 2)$$

$$\Leftrightarrow mx - y - 2m = 0$$

と表される。また、直線  $\ell$  が半円  $C_1$  に接することから、原点と直線  $\ell$  の距離は半円  $C_1$  の半径に等しくなる。したがって、

$$\frac{|m \cdot 0 - 1 \cdot 0 - 2m|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = \sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow m = -\sqrt{3} \quad (\because m < 0)$$

となり、直線  $\ell$  の方程式は、

$$y = -\sqrt{3}(x - 2)$$

となる。

(答)  $y = -\sqrt{3}(x - 2)$

(2)

直線  $\ell$  と半円  $C_1$  の接点 T の  $x$  座標は、(1) の図より正であり、

$$x^2 + \{-\sqrt{3}(x - 2)\}^2 = 3$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 12x + 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2x - 3)^2 = 0$$

$$\therefore x = \frac{3}{2} \quad (\because x > 0)$$

となる。また、接点 T の  $y$  座標は

$$y = -\sqrt{3}\left(\frac{3}{2} - 2\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

となる。したがって、接点 T の座標は  $\left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$  となる。  $C_2$  がこの点を通るから、

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = a\left(\frac{3}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{2\sqrt{3}}{9}$$

となる。

(答)  $a = \frac{2\sqrt{3}}{9}$

(3)

放物線  $C_2$  と直線  $\ell$  の交点の  $x$  座標は、

$$\frac{2\sqrt{3}}{9}x^2 = -\sqrt{3}(x - 2)$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 9x - 18 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2x - 3)(x + 6) = 0$$

$$\therefore x = \frac{3}{2}, -6$$

となる。したがって、6 分の 1 公式より、

$$S_1 = \int_{-6}^{\frac{3}{2}} \left\{ -\sqrt{3}(x - 2) - \frac{2\sqrt{3}}{9}x^2 \right\} dx$$

$$= -\frac{2\sqrt{3}}{9} \int_{-6}^{\frac{3}{2}} \left( x - \frac{3}{2} \right) (x + 6) dx$$

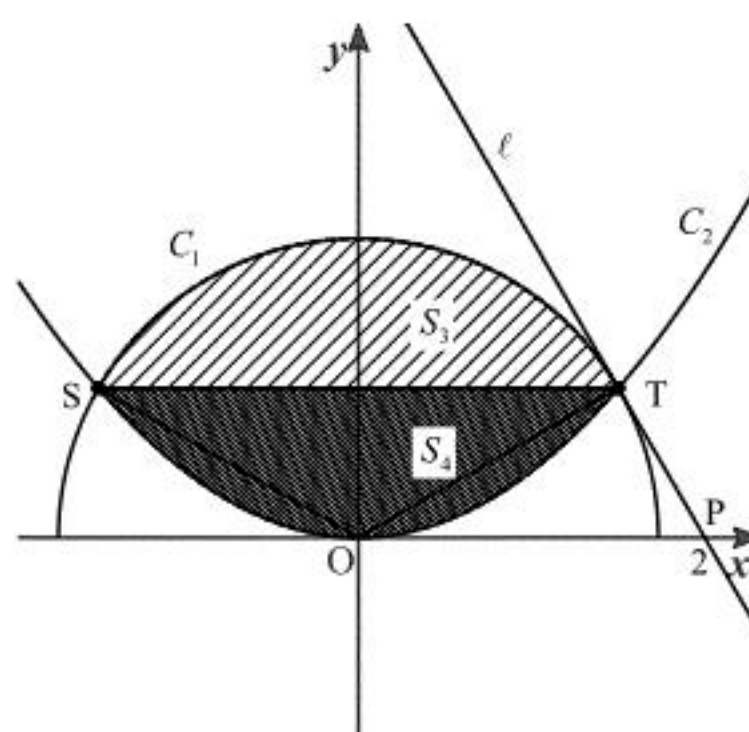
$$= \frac{2\sqrt{3}}{9 \cdot 6} \left( \frac{3}{2} - (-6) \right)^3$$

$$= \frac{125\sqrt{3}}{8}$$

である。次に  $S_2$  を求めるために、下図のように半円  $C_1$  と放物線  $C_2$  で囲まれた領域を  $S_3, S_4$

に分ける。すると、  $S_2 = S_3 + S_4$  となる。対称性より半円  $C_1$  と放物線  $C_2$  の交点は  $\left(\pm\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

となるので、点 S を  $S\left(-\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$  とおく。また、点 P を  $P(2, 0)$  とおく。



まず  $S_3$  を求める。接点 T の座標は  $\left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$  であるので、

$$\tan \angle TOP = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore \angle TOP = 30^\circ \quad (\because 0^\circ < \angle TOP < 90^\circ)$$

である。よって、

$$\angle TOS = 2(90^\circ - 30^\circ)$$

$$= 120^\circ$$

となる。したがって、  $S_3$  を含む扇形 O-ST の面積は

$$\pi(\sqrt{3})^2 \cdot \frac{120}{360} = \pi$$

である。一方で、三角形 OST の面積は

$$2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

となるので、  $S_3$  の面積は、

$$S_3 = \pi - \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

である。さらに、  $S_4$  の面積は 6 分の 1 公式より、

$$S_4 = \int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{2\sqrt{3}}{9}x^2 \right) dx$$

$$= -\frac{2\sqrt{3}}{9} \int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}} \left( x - \frac{3}{2} \right) \left( x + \frac{3}{2} \right) dx$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{9 \cdot 6} \left( \frac{3}{2} - \left( -\frac{3}{2} \right) \right)^3$$

$$= \sqrt{3}$$

となる。以上より、

$$S_1 - S_2 = S_1 - S_3 - S_4$$

$$= \frac{125\sqrt{3}}{8} - \left( \pi - \frac{3\sqrt{3}}{4} \right) - \sqrt{3}$$

$$= \frac{123\sqrt{3}}{8} - \pi$$

が得られる。

(答)  $\frac{123\sqrt{3}}{8} - \pi$