

(1)

$$f(x) = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}$$

とおくと、

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{1}{x-1} \right)' - \left(\frac{1}{x} \right)' \\ &= -\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{x^2} \\ &= \frac{1-2x}{x^2(x-1)^2} \end{aligned}$$

となるから、増減表は下のようになる。

x	...	0	...	$\frac{1}{2}$	...	1	...
$f'(x)$	+	/	+	0	-	/	-
$f(x)$	↗	/	↗	-4	↘	/	↘

また、

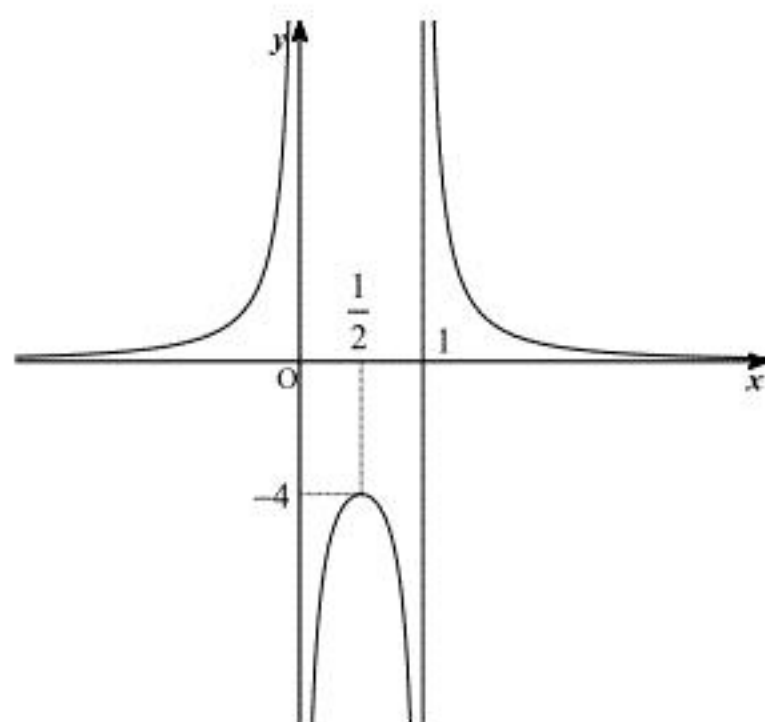
$$f(x) = \frac{1}{(x-1)x}$$

より、

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$$

であるから、グラフの概形は下のようになる。



(答) 前図

(2)

$$\begin{aligned} \int_1^2 x\sqrt{2-x}dx &= \int_1^2 \{2-(2-x)\}\sqrt{2-x}dx \\ &= \left[-\frac{4}{3}(2-x)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{5}(2-x)^{\frac{5}{2}} \right]_1^2 \\ &= \frac{4}{3} - \frac{2}{5} \\ &= \frac{14}{15} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{14}{15}$

(1)

$$f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x \text{ であり,}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 8x + 3$$

となる。よって,

$$f'(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{7}}{3}$$

となるから、 $f(x)$ の増減は下のようになる。

x	...	$\frac{4-\sqrt{7}}{3}$	...	$\frac{4+\sqrt{7}}{3}$	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$

ここで、 $f(x)$ を $3x^2 - 8x + 3$ で割ると、

$$f(x) = \left(\frac{x}{3} - \frac{4}{9}\right)f'(x) - \frac{14}{9}x + \frac{4}{3}$$

となる。 $x = \frac{4 \pm \sqrt{7}}{3}$ が $f'(x) = 0$ の解であることに注意して、上式に $x = \frac{4 \pm \sqrt{7}}{3}$ を代入すると

$$f\left(\frac{4 \pm \sqrt{7}}{3}\right) = -\frac{14}{9} \cdot \frac{4 \pm \sqrt{7}}{3} + \frac{4}{3} = \frac{-20 \mp 14\sqrt{7}}{27} \quad (\text{複合同順})$$

となる。よって $f(x)$ は $x = \frac{4-\sqrt{7}}{3}$ のときに極大値 $\frac{-20+14\sqrt{7}}{27}$ をとり、 $x = \frac{4+\sqrt{7}}{3}$ のときに極

小値 $\frac{-20-14\sqrt{7}}{27}$ をとる。

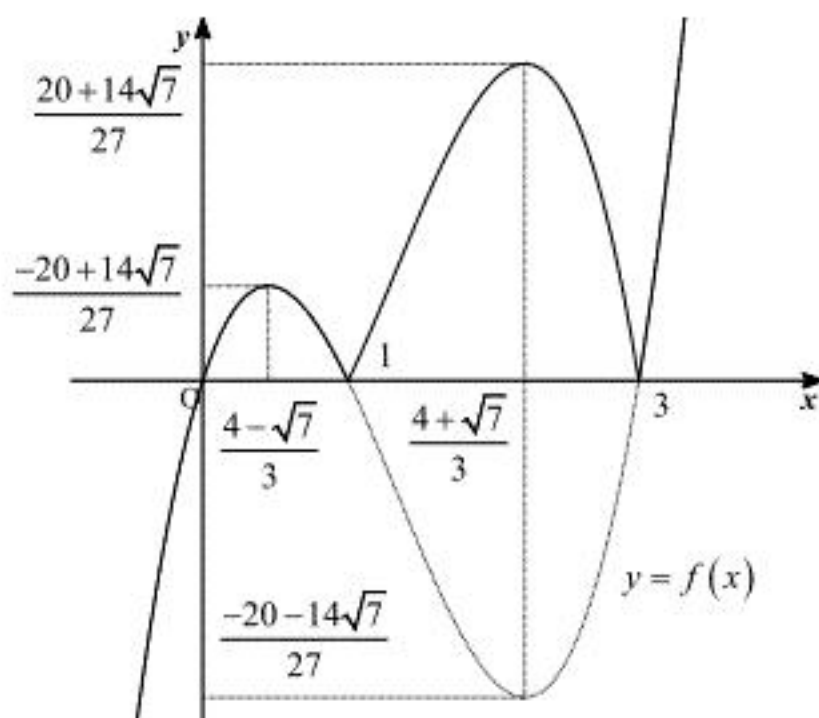
$$(\text{答}) \text{極大値: } \frac{-20+14\sqrt{7}}{27} \left(x = \frac{4-\sqrt{7}}{3}\right), \text{極小値: } \frac{-20-14\sqrt{7}}{27} \left(x = \frac{4+\sqrt{7}}{3}\right)$$

(2)

$x|x^2 - 4x + 3| = k$ の解の個数は、曲線 $y = x|x^2 - 4x + 3|$ と直線 $y = k$ の交点の個数に等しい。ここで

$$x|x^2 - 4x + 3| = x|(x-1)(x-3)|$$

となるから、(1)の結果を用いると、 $y = x|x^2 - 4x + 3|$ のグラフは下図のようになる。



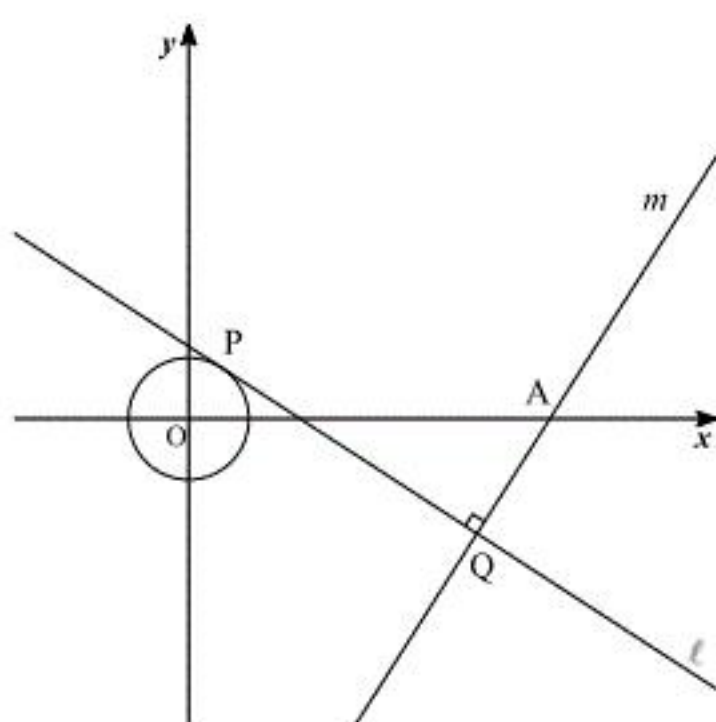
よって上図より、 $x|x^2 - 4x + 3| = k$ の解の個数は

$$\left\{ \begin{array}{l} k < 0, k > \frac{20+14\sqrt{7}}{27} \text{ のとき } 1 \text{ 個} \\ k = \frac{20+14\sqrt{7}}{27} \text{ のとき } 2 \text{ 個} \\ k = 0, \frac{-20+14\sqrt{7}}{27} < k < \frac{20+14\sqrt{7}}{27} \text{ のとき } 3 \text{ 個} \\ k = \frac{-20+14\sqrt{7}}{27} \text{ のとき } 4 \text{ 個} \\ 0 < k < \frac{-20+14\sqrt{7}}{27} \text{ のとき } 5 \text{ 個} \end{array} \right.$$

となる。

(答) 前述

円 $x^2 + y^2 = 1$, 直線 ℓ , m を図示すると, 下図のようになる。



点 P の座標を $(\cos \theta, \sin \theta)$ とおく。 x 軸に関する対称性から, $0 \leq \theta \leq \pi$ としてよい。このとき, 直線 ℓ の方程式は

$$x \cos \theta + y \sin \theta = 1$$

である。また, 点 A(6, 0) を通り ℓ に垂直な直線を m とおくと, 直線 m の方程式は

$$\begin{aligned} (x-6) \sin \theta - y \cos \theta &= 0 \\ \Leftrightarrow x \sin \theta - y \cos \theta &= 6 \sin \theta \end{aligned}$$

となる。AQ の長さは点 A と直線 ℓ の距離に等しく

$$AQ = \frac{|6 \cos \theta - 1|}{\sqrt{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}} = |6 \cos \theta - 1|$$

となり, PQ の長さは点 P と直線 m の距離に等しく

$$PQ = \frac{|\cos \theta \sin \theta - \sin \theta \cos \theta - 6 \sin \theta|}{\sqrt{\sin^2 \theta + (-\cos \theta)^2}} = 6 |\sin \theta|$$

となる。よって

$$AQ \cdot PQ = 6 |\sin \theta (6 \cos \theta - 1)|$$

となる。ここで $f(\theta) = \sin \theta (6 \cos \theta - 1)$ ($0 \leq \theta \leq \pi$) とおくと

$$\begin{aligned} f'(\theta) &= (6 \sin \theta \cos \theta - \sin \theta)' \\ &= 6 \cos^2 \theta - 6 \sin^2 \theta - \cos \theta \\ &= 12 \cos^2 \theta - \cos \theta - 6 \\ &= (3 \cos \theta + 2)(4 \cos \theta - 3) \end{aligned}$$

となる。 $0 \leq \theta \leq \pi$ で $\cos \theta$ は連続かつ単調減少で, $\cos 0 = 1$, $\cos \frac{\pi}{2} = 0$, $\cos \pi = -1$ であるから

, $\cos \alpha = \frac{3}{4}$, $\cos \beta = -\frac{2}{3}$ となる実数 α, β ($0 < \alpha < \beta < \pi$) がただ1つ存在する。 α, β を用いると

, $f(\theta)$ の増減は下のようになる。

θ	0	...	α	...	β	...	π
$f'(\theta)$		+	0	-	0	+	
$f(\theta)$	0	↗	極大	↘	極小	↗	0

ここで, $0 < \alpha < \beta < \pi$ より

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

$$\sin \beta = \sqrt{1 - \cos^2 \beta} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

となるから, $f(\theta)$ は $\theta = \alpha$ のとき最大値

$$f(\alpha) = \frac{\sqrt{7}}{4} \left(6 \cdot \frac{3}{4} - 1 \right) = \frac{7\sqrt{7}}{8}$$

をとり, $\theta = \beta$ のとき最小値

$$f(\beta) = \frac{\sqrt{5}}{3} \left\{ 6 \cdot \left(-\frac{2}{3} \right) - 1 \right\} = -\frac{5\sqrt{5}}{3}$$

となる。すると, $\frac{7\sqrt{7}}{8} < \frac{5\sqrt{5}}{3}$ であるから, AQ・PQ の最大値は

$$6|f(\beta)| = 10\sqrt{5}$$

となる。

(1)

z が、原点を中心とする半径 2 の円周から $z=2$ を除いた図形上を動くとき、

$$|z|=2$$

を満たす。また、与式より

$$\begin{aligned} w &= \frac{iz}{z-2} \\ \Leftrightarrow w(z-2) &= iz \quad (\because z \neq 2) \\ \Leftrightarrow (w-i)z &= 2w \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

となるから両辺の絶対値をとると

$$\begin{aligned} |w-i|2 &= 2|w| \\ \Leftrightarrow |w-i| &= |w| \end{aligned}$$

となる。よって w は $0, i$ の垂直二等分線を描く。

(答) $0, i$ の垂直二等分線

(2)

$w=i$ とすると、

$$\begin{aligned} i &= \frac{iz}{z-2} \\ \Leftrightarrow iz - 2i &= iz \\ \Leftrightarrow 2i &= 0 \end{aligned}$$

となり矛盾する。したがって、 $w \neq i$ として良い。①より、

$$z = \frac{2w}{w-i} \quad (\because w \neq i)$$

である。 z が虚軸上を動くとき、 $z+\bar{z}=0$ を満たすから、

$$\begin{aligned} z+\bar{z} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{2w}{w-i} + \frac{2\bar{w}}{\bar{w}+i} &= 0 \\ \Leftrightarrow w(\bar{w}+i) + \bar{w}(w-i) &= 0 \quad (\because w \neq i) \\ \Leftrightarrow w\bar{w} + \frac{i}{2}w - \frac{i}{2}\bar{w} &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(w - \frac{i}{2}\right)\left(\bar{w} + \frac{i}{2}\right) &= \frac{1}{4} \\ \Leftrightarrow \left|w - \frac{i}{2}\right| &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

となる。よって w は $\frac{i}{2}$ を中心とする半径 $\frac{1}{2}$ の円(ただし i を除く)を描く。

(答) $\frac{i}{2}$ を中心とする半径 $\frac{1}{2}$ の円(ただし i を除く)

(3)

w が実軸上を動くとき、 $w=\bar{w}$ となるから、 $z \neq 2$ のとき

$$\begin{aligned} w &= \bar{w} \\ \Leftrightarrow \frac{-i\bar{z}}{\bar{z}-2} &= \frac{iz}{z-2} \\ \Leftrightarrow \bar{z}(z-2) + z(\bar{z}-2) &= 0 \\ \Leftrightarrow z\bar{z} - z - \bar{z} &= 0 \\ \Leftrightarrow (z-1)(\bar{z}-1) &= 1 \\ \Leftrightarrow |z-1| &= 1 \end{aligned}$$

となる。よって z は 1 を中心とする半径 1 の円 (ただし $z=2$ を除く) を描く。

(答) 1 を中心とする半径 1 の円 (ただし $z=2$ を除く)