

1

(1)

$\log_2 x = t$ とおく。

$$\begin{aligned} 6(\log_2 x)^3 + 13(\log_2 x)^2 + 4(\log_2 x) - 3 &> 0 \\ \Leftrightarrow 6t^3 + 13t^2 + 4t - 3 &> 0 \\ \Leftrightarrow (t+1)(3t-1)(2t+3) &> 0 \\ \Leftrightarrow -\frac{3}{2} < t < -1, \frac{1}{3} < t \end{aligned}$$

となるので、

$$\begin{aligned} -\frac{3}{2} < \log_2 x < -1, \frac{1}{3} < \log_2 x \\ \therefore \frac{\sqrt{2}}{4} < x < \frac{1}{2}, \sqrt[3]{2} < x \end{aligned}$$

が得られる。

(答) $\frac{\sqrt{2}}{4} < x < \frac{1}{2}, \sqrt[3]{2} < x$

(2)

$a_{n+1} - a_n = 18n + 6$ と変形でき、これは階差数列であるから、 $n \geq 2$ のとき、

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (18k + 6) \\ &= 4 + 18 \cdot \frac{1}{2} \cdot (n-1) \cdot n + 6(n-1) \\ &= 9n^2 - 3n - 2 \\ &= (3n-2)(3n+1) \end{aligned}$$

となる。また、 $a_1 = 4$ より、これは $n=1$ のときも成り立つ。 n は自然数であるから、 $a_n \neq 0$ であり、 a_n の逆数をとると、

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_n} &= \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} \\ &= \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{3n-2} - \frac{1}{3n+1} \right) \end{aligned}$$

となる。これより、

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k} &= \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{4} \right) + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{7} \right) + \cdots + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{3n-2} - \frac{1}{3n+1} \right) \\ &= \frac{1}{3} \cdot 1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3n+1} \\ &= \frac{n}{3n+1} \end{aligned}$$

となる。

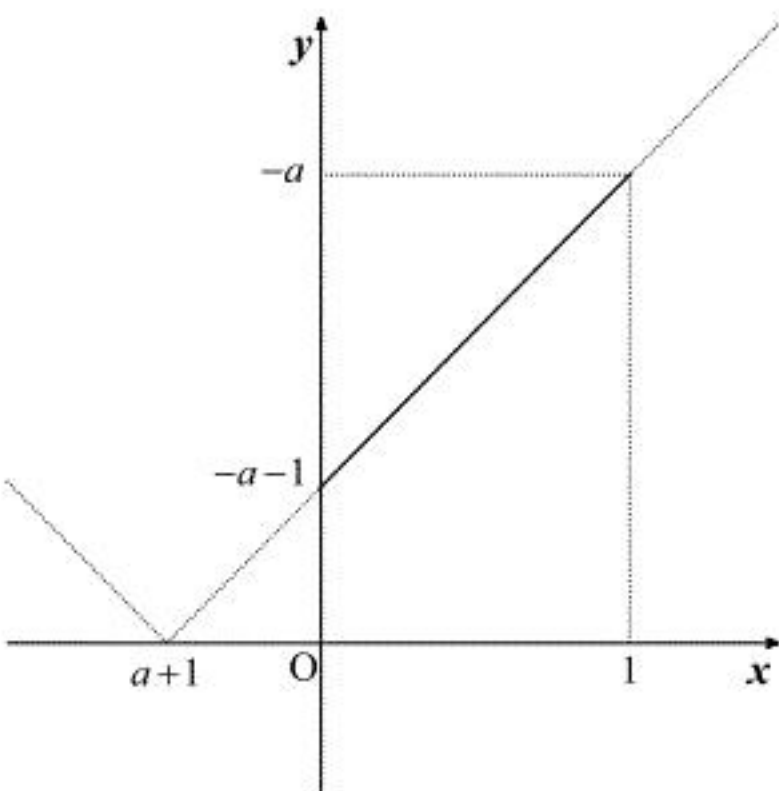
(答) $\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k} = \frac{n}{3n+1}$

(3)

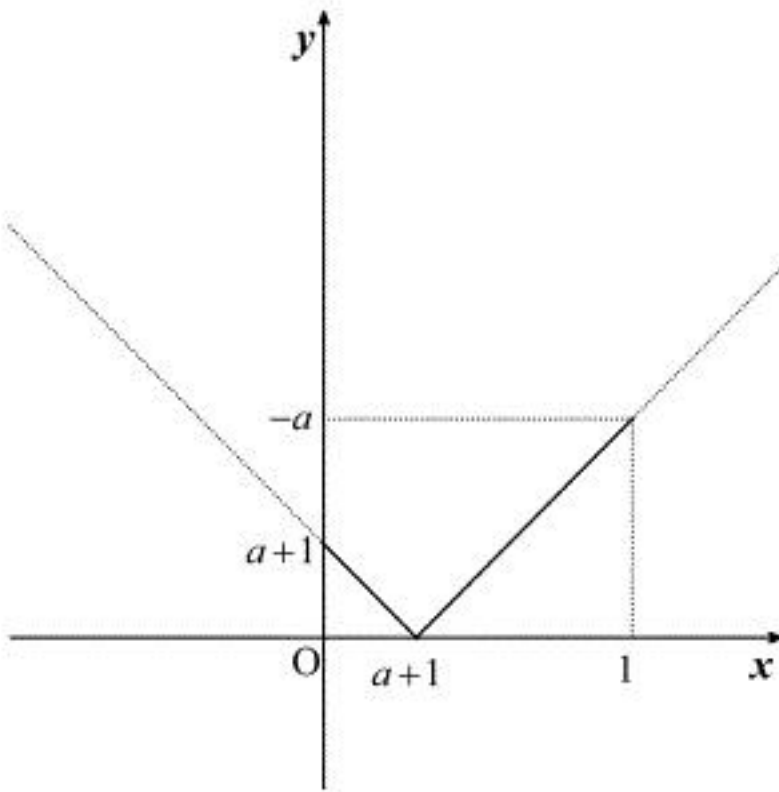
$$\begin{aligned} y &= \sqrt{x^2 - 2ax - 2x + a^2 + 2a + 1} \\ &= \sqrt{x^2 - 2(a+1)x + (a+1)^2} \\ &= \sqrt{\{x - (a+1)\}^2} \\ &= |x - (a+1)| \end{aligned}$$

となる。

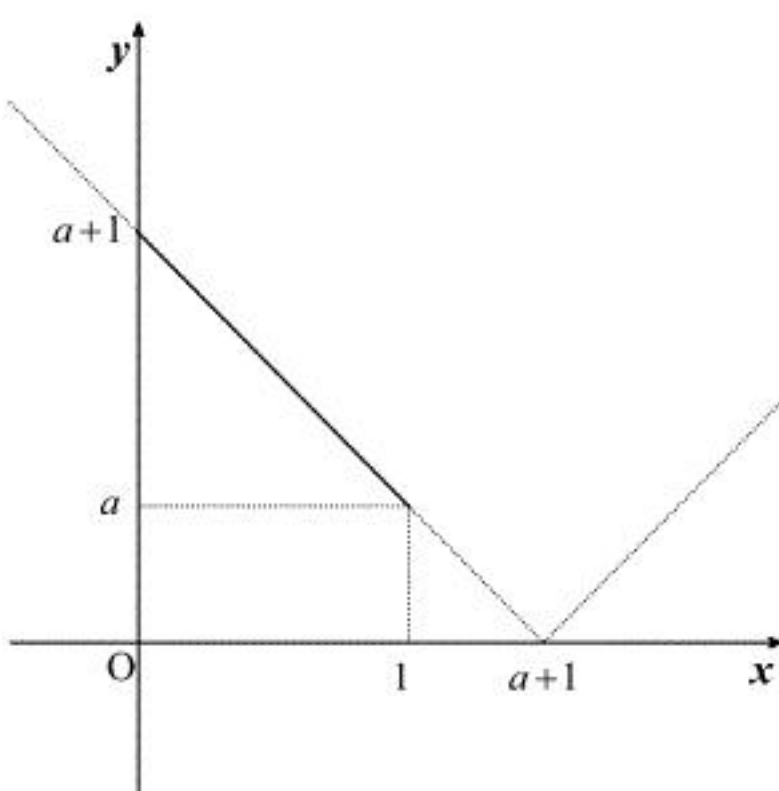
[1] $a+1 < 0$ 、すなわち $a < -1$ の場合
グラフは下図のようになる。



[2] $0 \leq a+1 \leq 1$ 、すなわち $-1 \leq a \leq 0$ の場合
グラフは下図のようになる。



[3] $a+1 > 1$ 、すなわち $a > 0$ の場合
グラフは下図のようになる。



Xは線分OF上にあるから、実数 a を用いて、

$$\overrightarrow{OX} = a\overrightarrow{OF} = (a, a, a) \quad \cdots \textcircled{1}$$

とおける。ただし、 $0 \leq a \leq 1$ である。また、Xは三角形HIJ上の点でもあるから、実数 m, n を用いて、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OX} &= \overrightarrow{OI} + m\overrightarrow{IH} + n\overrightarrow{IJ} \\ &= \left(1, 1, \frac{1}{2}\right) + m\left(-\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{2}\right) + n\left(0, t-1, \frac{1}{2}\right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{3}m, nt - n + 1, \frac{1}{2}m + \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

ともおける。したがって、各成分を比較して、

$$\begin{cases} a = 1 - \frac{1}{3}m & \cdots \textcircled{2} \\ a = nt - n + 1 & \cdots \textcircled{3} \\ a = \frac{1}{2}(m + n + 1) & \cdots \textcircled{4} \end{cases}$$

が成り立つ。ただし、点Jは辺EF上にあるから $0 \leq t \leq 1$ である。ここで $0 \leq a \leq 1$ であるから、

①より、 $OX = \sqrt{a^2 + a^2 + a^2} = \sqrt{3}a$ となる。 $OX = \frac{21}{25}\sqrt{3}$ のとき、

$$\begin{aligned} \sqrt{3}a &= \frac{21}{25}\sqrt{3} \\ \therefore a &= \frac{21}{25} \end{aligned}$$

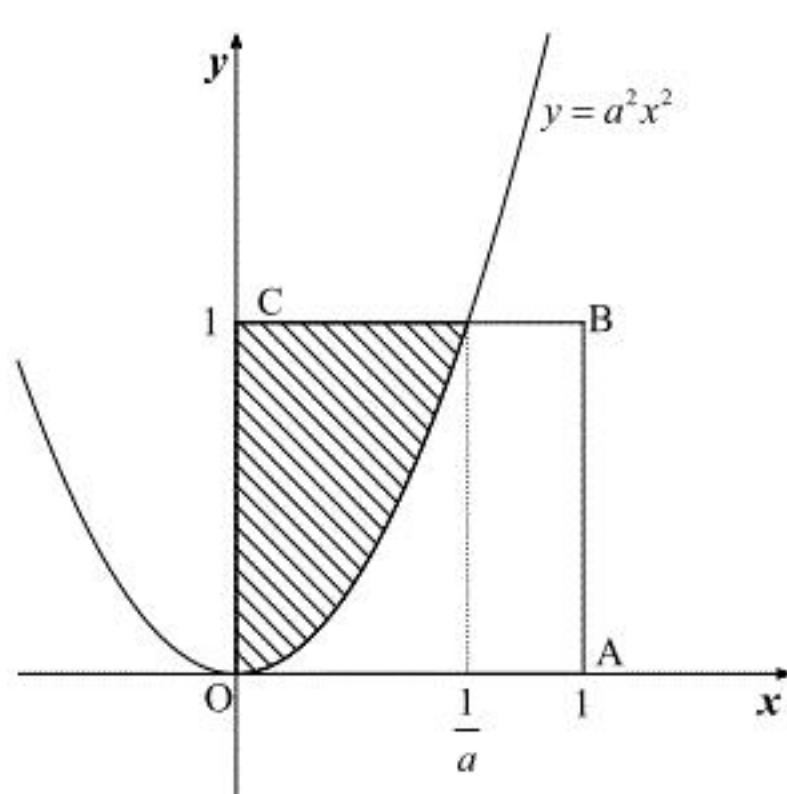
となり、これは $0 \leq a \leq 1$ を満たす。これと、②、③、④を合わせると、

$$m = \frac{12}{25}, n = \frac{1}{5}, t = \frac{1}{5}$$

が得られる。これは $0 \leq t \leq 1$ を満たす。

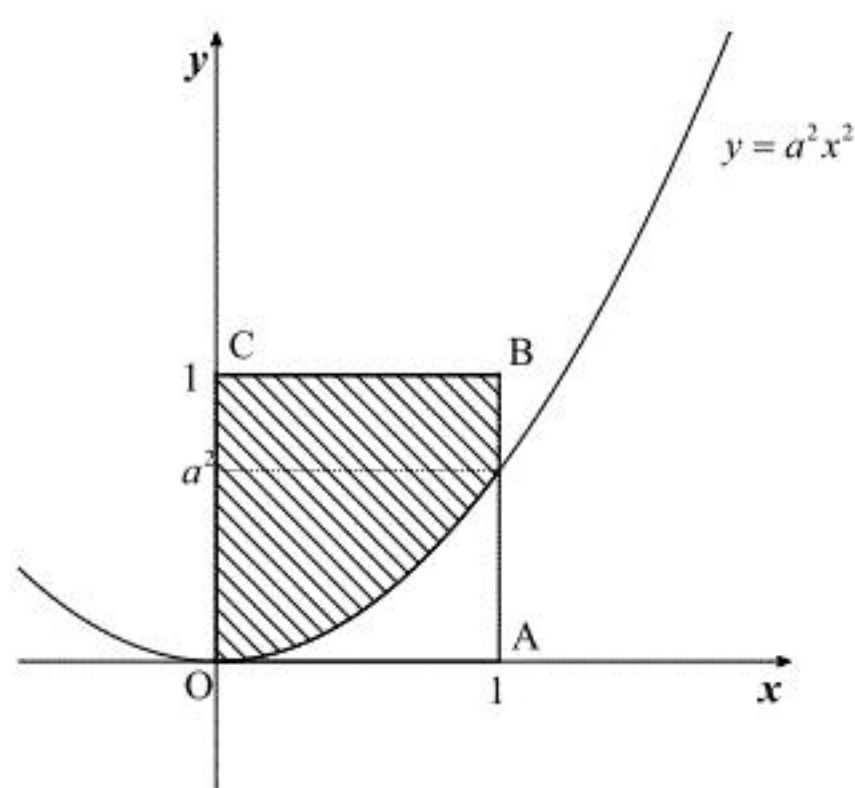
(答) $t = \frac{1}{5}$

(1)

[1] $a \geq 1$ の場合 S_1 の概形は下図の斜線部のようになる。したがって、このとき、 S_1 は、

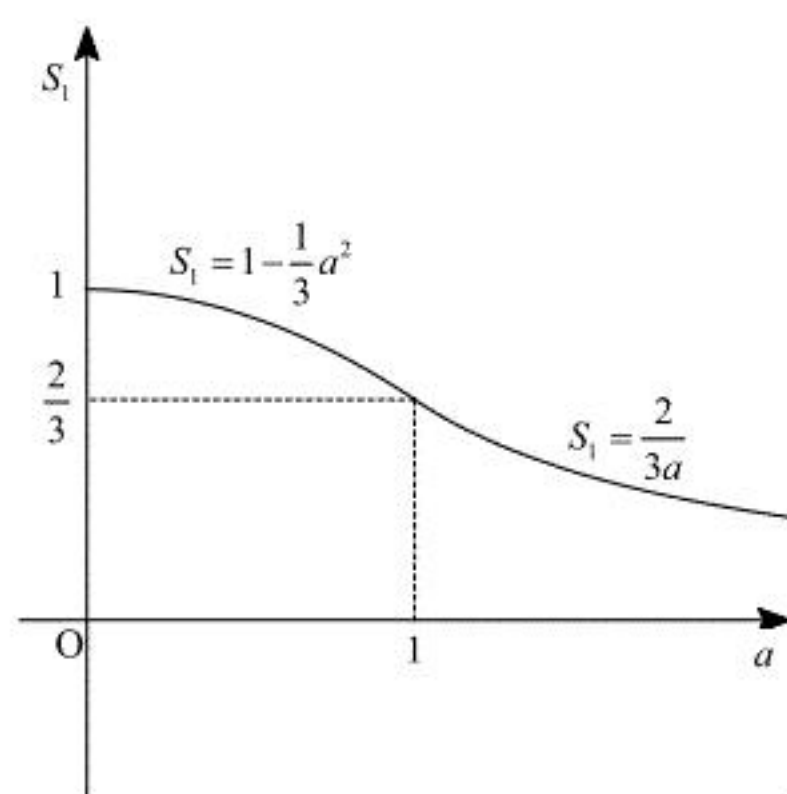
$$\begin{aligned} S_1 &= \int_0^{\frac{1}{a}} (1 - a^2 x^2) dx \\ &= \left[x - \frac{1}{3} a^2 x^3 \right]_0^{\frac{1}{a}} \\ &= \frac{2}{3a} \end{aligned}$$

となる。

[2] $0 < a < 1$ の場合 S_1 の概形は下図の斜線部のようになる。したがって、このとき、 S_1 は、

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_0^1 (1 - a^2 x^2) dx \\ &= \left[x - \frac{1}{3} a^2 x^3 \right]_0^1 \\ &= 1 - \frac{1}{3} a^2 \end{aligned}$$

となる。

以上、[1], [2]より、 S_1 のグラフは下図のようになる。

(答) 前図

(2)

[1] $a \geq 1$ の場合(1)のグラフより $S_1 \leq \frac{2}{3}$ だから $S_1 = \frac{1}{4}$ であればよい。 $S_1 = \frac{2}{3a}$ であるから、

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{1}{4} \\ \Leftrightarrow \frac{2}{3a} &= \frac{1}{4} \\ \Leftrightarrow a &= \frac{8}{3} \end{aligned}$$

となり、これは $a \geq 1$ を満たす。[2] $0 < a < 1$ の場合(1)のグラフより $S_1 > \frac{2}{3}$ だから $S_1 = \frac{3}{4}$ であればよい。 $S_1 = 1 - \frac{1}{3} a^2$ であるから、

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{3}{4} \\ \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{3} a^2 &= \frac{3}{4} \\ \Leftrightarrow a^2 &= \frac{3}{4} \\ \Leftrightarrow a &= \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

となるが、このうち $0 < a < 1$ を満たすのは $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$ である。以上、[1], [2]より、求める a の値は $a = \frac{8}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}$ となる。(答) $a = \frac{8}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}$