

(1)

$$f(x) = \log \frac{\cos x}{1 - \sin x} \text{ とすると,}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\left(\frac{\cos x}{1 - \sin x} \right)'}{\frac{\cos x}{1 - \sin x}} \\ &= \left(\frac{1 - \sin x}{\cos x} \right) \cdot \left(\frac{(\cos x)' \cdot (1 - \sin x) - (\cos x) \cdot (1 - \sin x)'}{(1 - \sin x)^2} \right) \\ &= \left(\frac{1 - \sin x}{\cos x} \right) \cdot \left(\frac{(-\sin x) \cdot (1 - \sin x) - (\cos x) \cdot (-\cos x)}{(1 - \sin x)^2} \right) \\ &= \left(\frac{1 - \sin x}{\cos x} \right) \cdot \left(\frac{\sin^2 x + \cos^2 x - \sin x}{(1 - \sin x)^2} \right) \\ &= \frac{1}{\cos x} \quad (\because \sin^2 x + \cos^2 x = 1) \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{1}{\cos x}$

(2)

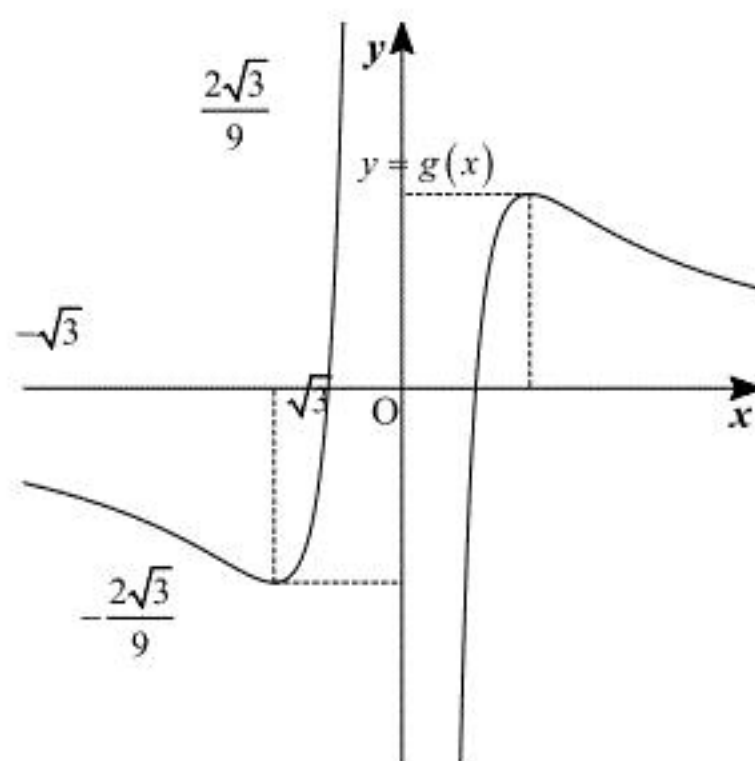
$$g(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} \text{ とすると,}$$

$$\begin{aligned} g'(x) &= -\frac{1}{x^2} + \frac{3}{x^4} \\ &= \frac{3 - x^2}{x^4} \\ &= \frac{(\sqrt{3} - x)(\sqrt{3} + x)}{x^4} \end{aligned}$$

となる。また、 $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$ 、 $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0$ であるから、増減表は次のようになる。

x	$-\infty$	$\cdots$	$-\sqrt{3}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$	∞
$g'(x)$		$-$	0	$+$	$\diagdown$	$+$	0	$-$	
$g(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{2\sqrt{3}}{9}$	$\nearrow$	$\diagdown$	$\nearrow$	$\frac{2\sqrt{3}}{9}$	$\searrow$	0

$\lim_{x \rightarrow +0} g(x) = -\infty$ 、 $\lim_{x \rightarrow -0} g(x) = \infty$ であるから、 $y = g(x)$ のグラフは下図のようになる。



$y = g(x)$ と直線 $y = a$ との交点の数が、求める実数解の個数である。

[1] $a < -\frac{2\sqrt{3}}{9}$, $\frac{2\sqrt{3}}{9} < a$ のとき

交点は1つである。したがって異なる実数解の数も1個となる。

[2] $a = 0$, $\pm \frac{2\sqrt{3}}{9}$ のとき

交点は2つである。したがって異なる実数解の数も2個となる。

[3] $-\frac{2\sqrt{3}}{9} < a < 0$, $0 < a < \frac{2\sqrt{3}}{9}$ のとき

交点は3つである。したがって異なる実数解の数も3個となる。

以上[1], [2], [3]より,

$$\left\{ \begin{array}{ll} a < -\frac{2\sqrt{3}}{9}, \frac{2\sqrt{3}}{9} < a \text{ のとき,} & 1 \text{ 個} \\ a = 0, \pm \frac{2\sqrt{3}}{9} \text{ のとき,} & 2 \text{ 個} \\ -\frac{2\sqrt{3}}{9} < a < 0, 0 < a < \frac{2\sqrt{3}}{9} \text{ のとき,} & 3 \text{ 個} \end{array} \right.$$

となる。

(答) 前述

(1)

部分積分により、

$$\begin{aligned}
 \int_0^2 x \log(x+2) dx &= \left[\frac{1}{2} x^2 \log(x+2) \right]_0^2 - \int_0^2 \frac{1}{2} x^2 \{ \log(x+2) \}' dx \\
 &= (2 \log 4 - 0) - \frac{1}{2} \int_0^2 \frac{x^2}{x+2} dx \\
 &= 4 \log 2 - \frac{1}{2} \int_0^2 \frac{(x+2)(x-2)+4}{x+2} dx \\
 &= 4 \log 2 - \frac{1}{2} \int_0^2 \left(x-2 + \frac{4}{x+2} \right) dx \\
 &= 4 \log 2 - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} x^2 - 2x + 4 \log(x+2) \right]_0^2 \\
 &= 4 \log 2 - \frac{1}{2} \{ (2-4+4 \log 4) - (0-0+4 \log 2) \} \\
 &= 2 \log 2 + 1
 \end{aligned}$$

となる。

(答) $2 \log 2 + 1$

(2)

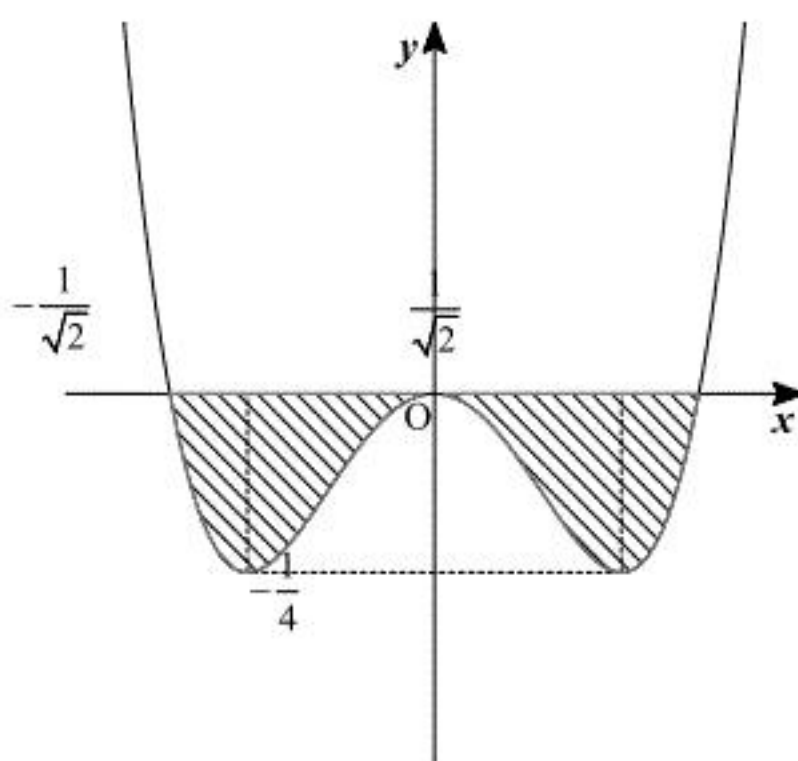
$f(x) = x^4 - x^2$ とする。このとき、

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= 4x^3 - 2x \\
 &= 4x \left(x^2 - \frac{1}{2} \right) \\
 &= 4x \left(x - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \left(x + \frac{1}{\sqrt{2}} \right)
 \end{aligned}$$

となる。したがって、増減表は次のようになる。

x	...	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	...	0	...	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$

これより、 $y = f(x)$ のグラフは下図のようになり、 $y = f(x)$ と x 軸で囲まれた部分は下図における斜線部である。



ここで、 $y = x^4 - x^2$ を x^2 について解くと、 $-\frac{1}{4} \leq y \leq 0$ の範囲で、 $x^2 = \frac{1 \pm \sqrt{1+4y}}{2}$ である。グ

ラフは y 軸に関して対称であるから、 $x > 0$ の範囲で、 $x_1^2 = \frac{1 - \sqrt{1+4y}}{2}$ 、 $x_2^2 = \frac{1 + \sqrt{1+4y}}{2}$ と定

めると、求める体積 V は、

$$\begin{aligned}
 V &= \int_{-\frac{1}{4}}^0 \pi (x_2^2 - x_1^2) dy \\
 &= \pi \int_{-\frac{1}{4}}^0 \sqrt{1+4y} dy \\
 &= \pi \left[\frac{1}{6} (1+4y)^{\frac{3}{2}} \right]_{-\frac{1}{4}}^0 \\
 &= \pi \left(\frac{1}{6} - 0 \right) \\
 &= \frac{\pi}{6}
 \end{aligned}$$

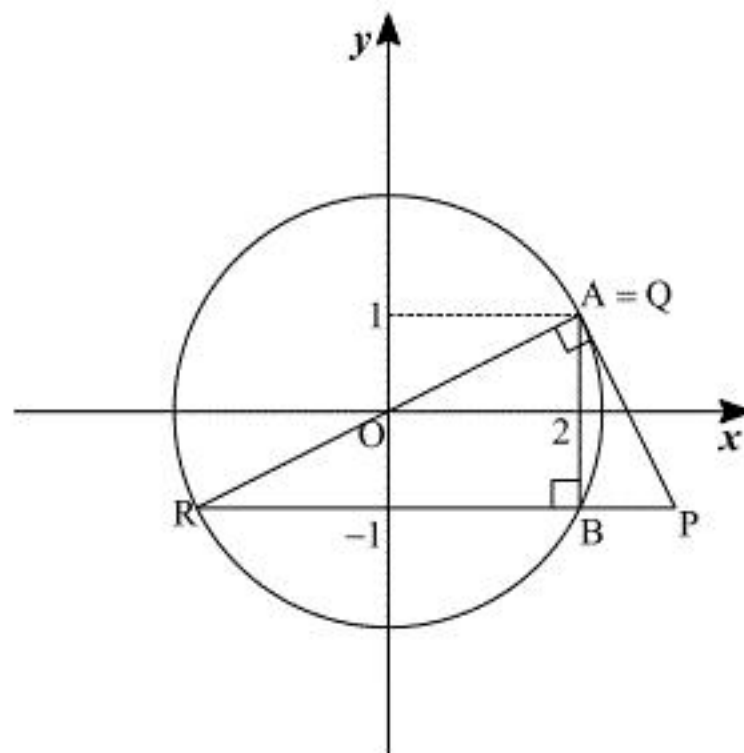
となる。

(答) $\frac{\pi}{6}$

(1)

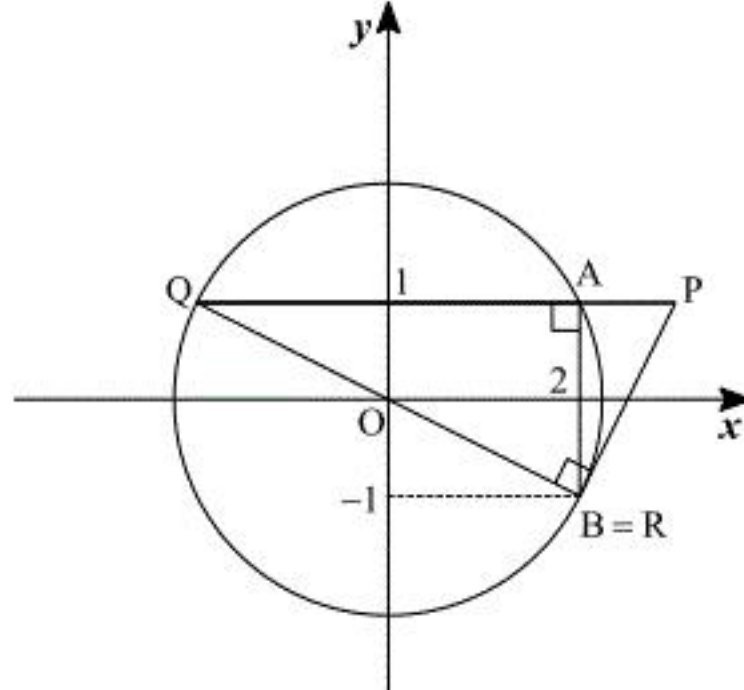
点 Q, R の位置によって場合分けを行う。

[1] 点 Q が点 A と一致するとき



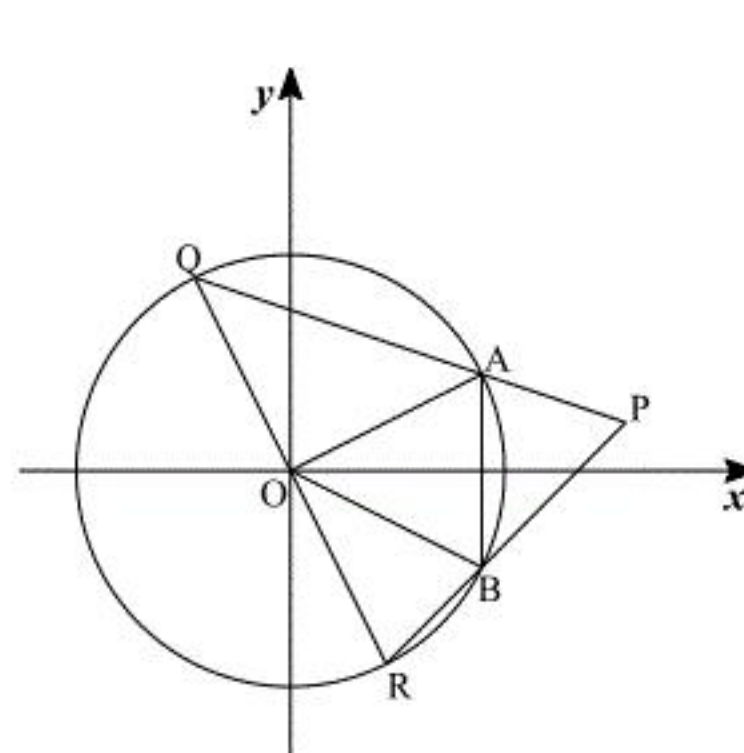
上図より、 $\angle APB + \angle BAP = 90^\circ$ 、 $\angle BAO + \angle BAP = 90^\circ$ であるから、 $\angle APB = \angle BAO$ となる。

[2] 点 R が点 B と一致するとき



[1]と同様にして、 $\angle APB = \angle ABO$ となる。OA = OB より $\triangle OAB$ は二等辺三角形であるから、 $\angle ABO = \angle BAO$ である。よって、 $\angle APB = \angle BAO$ である。

[3] $Q \neq A$ かつ $R \neq B$ かつ、点 Q, R が優弧 AB 上にあるとき



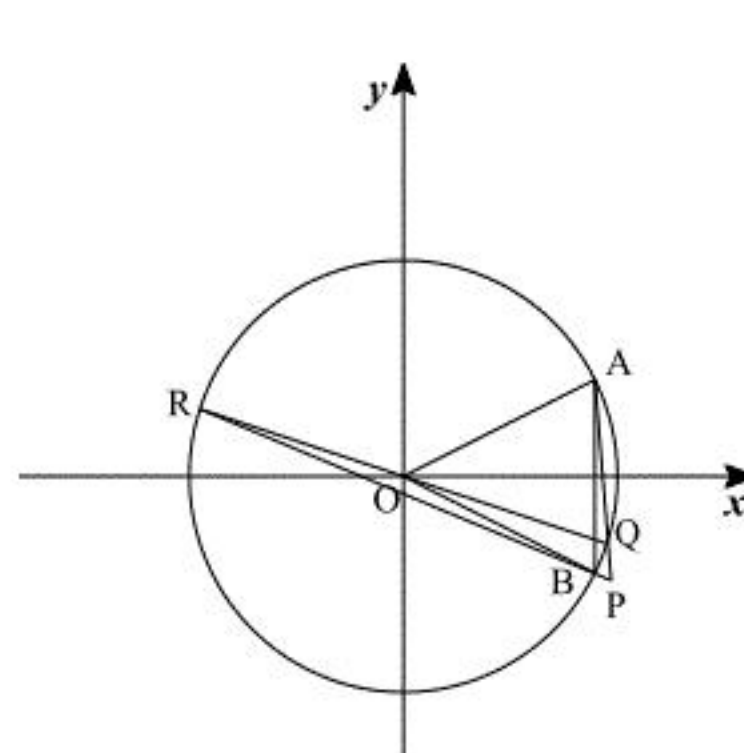
$$\angle APB = 180^\circ - \angle ABP - \angle PAB \quad \dots \textcircled{1}$$

である。四角形 ABRQ は円に内接するから、 $\angle OQA = \angle ABP$ である。これと、 $OQ = OA$ より $\angle OQA = \angle OAQ$ であることから、 $\angle OAQ = \angle ABP$ が成り立つ。よって、

$$\angle BAO = 180^\circ - \angle OAQ - \angle PAB = 180^\circ - \angle ABP - \angle PAB \quad \dots \textcircled{2}$$

となるので、 $\textcircled{1}$ 、 $\textcircled{2}$ を比較して、 $\angle APB = \angle BAO$ が成り立つ。

[4] $Q \neq A$ かつ $R \neq B$ かつ、点 Q が劣弧 AB 上にあるとき



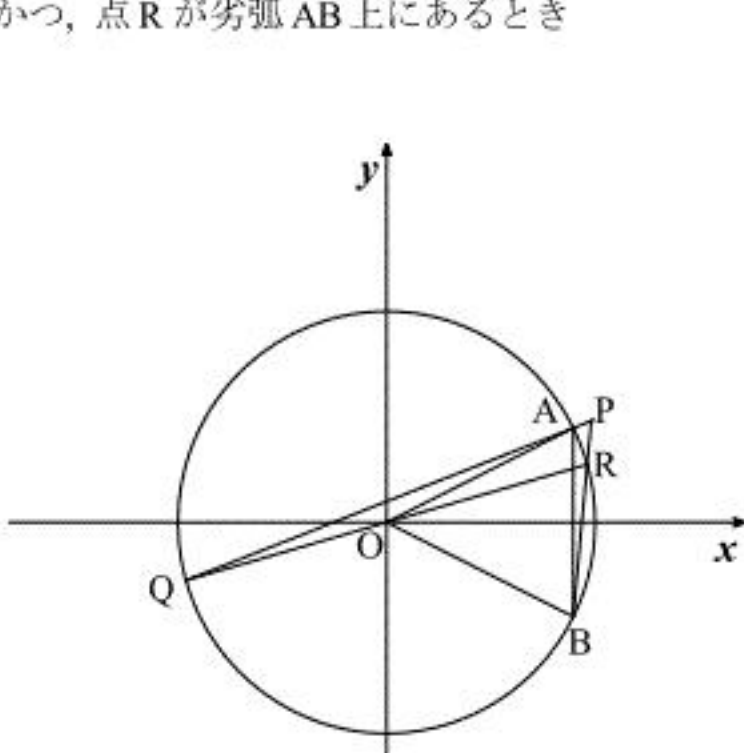
$$\angle APB = 180^\circ - \angle ABP - \angle PAB \quad \dots \textcircled{3}$$

である。また、弧 QB に対して円周角の定理より、 $\angle PAB = \angle ORB$ である。これと、 $OR = OB$ より $\angle ORB = \angle OBR$ であることから、 $\angle PAB = \angle OBR$ が成り立つ。また、 $OA = OB$ より $\angle ABO = \angle BAO$ である。以上より、

$$\angle BAO = \angle ABO = 180^\circ - \angle ABP - \angle OBR = 180^\circ - \angle ABP - \angle PAB \quad \dots \textcircled{4}$$

となるので、 $\textcircled{3}$ 、 $\textcircled{4}$ を比較して、 $\angle APB = \angle BAO$ が成り立つ。

[5] $Q \neq A$ かつ $R \neq B$ かつ、点 R が劣弧 AB 上にあるとき



[4]と同様にして、 $\angle APB = \angle ABO = \angle BAO$ が成り立つ。

以上、[1], [2], [3], [4], [5]より、いずれの場合も $\angle APB = \angle BAO$ となる。 $\angle BAO$ は点 P の位置によらないから、題意は示された。

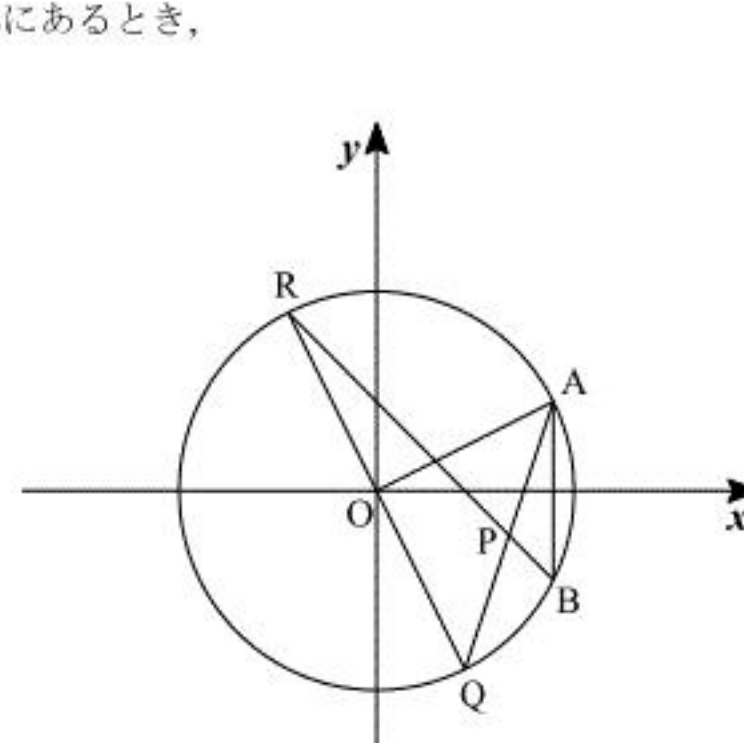
(証明終)

(2)

[1] 点 P が円 C の外部にあるとき、

(1)より、 $\angle APB$ は一定であるから、点 P は(1)の[1]の図の $\triangle ABP$ の外接円のうち、円 C の外部にある部分の上を動く。

[2] 点 P が円 C の内部にあるとき、



RA に対して円周角の定理より、 $\angle PBA = \angle OQA$ である。これと、 $OA = OQ$ より $\angle OQA = \angle OAP$ であることから、 $\angle PBA = \angle OAP$ が成り立つ。

$$\angle APB = 180^\circ - \angle PAB - \angle PBA = 180^\circ - \angle PAB - \angle OAP = 180^\circ - \angle BAO$$

となり、 $\angle APB$ は一定である。また、[1]の場合の $\angle APB$ の大きさと[2]の場合の $\angle APB$ の大きさの和は 180° である。よって、点 P は(1)の[1]の図の $\triangle ABP$ の外接円のうち、円 C の内部にある部分の上を動く。

以上、[1], [2]より、求める軌跡は(1)の[1]の図の $\triangle ABP$ の外接円から、2点 $(2, 1)$ 、 $(2, -1)$ を除いたものになる。この図において、 $AB = 2$ 、 $BR = 4$ 、 $\triangle ABR \sim \triangle PBA$ より、 $BP = 1$ であり、 $P(3, -1)$ である。直角三角形の外接円の中心は、斜辺の中点であるから、三角形 ABP の外接円の中心は、 $\left(\frac{5}{2}, 0\right)$ である。半径は、

$$\sqrt{\left(\frac{5}{2} - 2\right)^2 + (0 - 1)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

となる。したがって求める軌跡は、円 $\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{5}{4}$ から2点 $(2, 1)$ 、 $(2, -1)$ を除いたものになる。

(答) 円 $\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{5}{4}$ 、ただし2点 $(2, 1)$ 、 $(2, -1)$ を除く