

(1)

すべての自然数 n について、

$$\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^{2n-1}=a_n\sqrt{2}+b_n\sqrt{3} \quad \cdots \textcircled{1}$$

が成り立つことを、数学的帰納法を利用して示す。

[1] $n=1$ のとき

$$\begin{aligned} (\textcircled{1} \text{の左辺}) &= \left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^{2\cdot 1-1} \\ &= \sqrt{2}+\sqrt{3} \end{aligned}$$

であり、

$$\begin{aligned} (\textcircled{1} \text{の右辺}) &= a_1\sqrt{2}+b_1\sqrt{3} \\ &= 1\cdot\sqrt{2}+1\cdot\sqrt{3} \\ &= \sqrt{2}+\sqrt{3} \end{aligned}$$

であるから、 $\textcircled{1}$ は成立する。

[2] $n=k$ (k は自然数) のとき $\textcircled{1}$ が成り立つことを仮定すると、

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^{2(k+1)-1} &= \left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^{2k+1} \\ &= \left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2 \cdot \left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^{2k-1} \\ &= (5+2\sqrt{6}) \cdot (a_k\sqrt{2}+b_k\sqrt{3}) \\ &= (5a_k+6b_k)\sqrt{2} + (4a_k+5b_k)\sqrt{3} \\ &= a_{k+1}\sqrt{2} + b_{k+1}\sqrt{3} \end{aligned}$$

となり、 $n=k+1$ においても $\textcircled{1}$ は成立する。

以上[1], [2]より、すべての自然数 n について、 $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^{2n-1}=a_n\sqrt{2}+b_n\sqrt{3}$ が成立することが示された。

(証明終)

(2)

$c_n = a_n\sqrt{2} - b_n\sqrt{3}$ とおくと、

$$\begin{aligned} c_{n+1} &= a_{n+1}\sqrt{2} - b_{n+1}\sqrt{3} \\ &= (5a_n+6b_n)\sqrt{2} - (4a_n+5b_n)\sqrt{3} \\ &= (5-2\sqrt{6})(a_n\sqrt{2}-b_n\sqrt{3}) \\ &= (\sqrt{2}-\sqrt{3})^2 c_n \end{aligned}$$

が成り立つ。ここで、

$$c_1 = a_1\sqrt{2} - b_1\sqrt{3} = \sqrt{2} - \sqrt{3}$$

であるから、数列 $\{c_n\}$ は、初項 $\sqrt{2}-\sqrt{3}$ 、公比 $(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2$ の数列である。よって、一般項は、

$$c_n = (\sqrt{2}-\sqrt{3}) \cdot (\sqrt{2}-\sqrt{3})^{2(n-1)} = (\sqrt{2}-\sqrt{3})^{2n-1}$$

である。

$$(\text{答}) \quad c_n = (\sqrt{2}-\sqrt{3})^{2n-1}$$

(3)

(1), (2)より

$$\begin{aligned} a_n\sqrt{2}+b_n\sqrt{3} &= (\sqrt{2}+\sqrt{3})^{2n-1} \\ a_n\sqrt{2}-b_n\sqrt{3} &= (\sqrt{2}-\sqrt{3})^{2n-1} \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left\{ (\sqrt{2}+\sqrt{3})^{2n-1} + (\sqrt{2}-\sqrt{3})^{2n-1} \right\} \\ b_n &= \frac{1}{2\sqrt{3}} \left\{ (\sqrt{2}+\sqrt{3})^{2n-1} - (\sqrt{2}-\sqrt{3})^{2n-1} \right\} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad a_n = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left\{ (\sqrt{2}+\sqrt{3})^{2n-1} + (\sqrt{2}-\sqrt{3})^{2n-1} \right\}$$

$$b_n = \frac{1}{2\sqrt{3}} \left\{ (\sqrt{2}+\sqrt{3})^{2n-1} - (\sqrt{2}-\sqrt{3})^{2n-1} \right\}$$

(1)

$f(x) = |x^2 - 8x + 7| + x - 7$ について、 $x^2 - 8x + 7 = (x-1)(x-7)$ より、

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 7x & (x < 1, 7 \leq x) \\ -x^2 + 9x - 14 & (1 \leq x < 7) \end{cases}$$

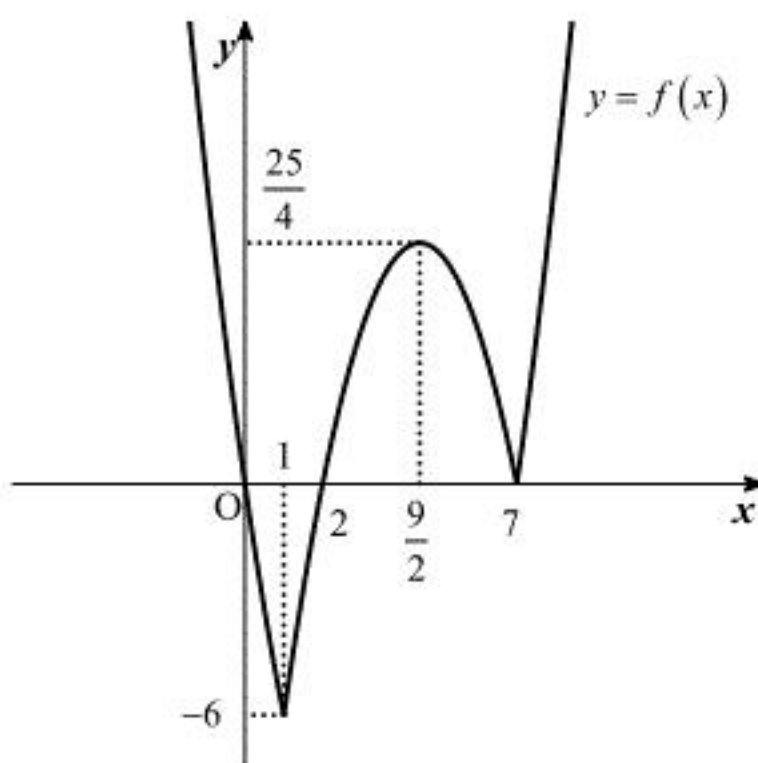
となる。また、

$$x^2 - 7x = \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{49}{4}$$

および

$$-x^2 + 9x - 14 = -\left(x - \frac{9}{2}\right)^2 + \frac{25}{4}$$

より、 $y = f(x)$ のグラフは下図の通りである。



以上より、 $0 \leq x \leq 7$ において、 $f(x)$ は最大値 $f\left(\frac{9}{2}\right) = \frac{25}{4}$ を、最小値 $f(1) = -6$ をとる。

(答) 最大値 $\frac{25}{4}$, 最小値 -6

(2)

$f(x) = ax$ が異なる 4 個の実数解を持つとき、直線 $y = ax$ と曲線 $y = f(x)$ が異なる 4 個の共有点を持つ。直線 $y = ax$ と曲線 $y = -x^2 + 9x - 14$ が接するとき、

$$-x^2 + 9x - 14 = ax$$

$$\Leftrightarrow x^2 + (a-9)x + 14 = 0$$

が重解を持つから、

$$(a-9)^2 - 4 \cdot 14 = 0$$

$$\Leftrightarrow a = 9 \pm 2\sqrt{14}$$

である。接点の x 座標は

$$x = \frac{-a+9}{2} = \mp\sqrt{14} \text{ (復号同順)}$$

だから、 $1 \leq x \leq 7$ において接するのは、 $a = 9 - 2\sqrt{14}$ のときである。直線 $y = ax$ は原点を通ることをあわせて、(1)の図より、直線 $y = ax$ と曲線 $y = f(x)$ が異なる 4 個の共有点を持つとき、

$$0 < a < 9 - 2\sqrt{14}$$

である。

(答) $0 < a < 9 - 2\sqrt{14}$

(3)

$g(x) = \int_0^x f(t) dt$ のとき、 $g'(x) = f(x)$ である。(1)の図より、 $0 \leq x \leq 7$ における $g(x)$ の増減表は以下の通りである。

x	0	...	2	...	7
$g'(x)$		-	0	+	
$g(x)$		↘	極小	↗	

よって、 $0 \leq x \leq 7$ において、 $g(x)$ は $x=2$ のとき最小値をとり、

$$\begin{aligned} g(2) &= \int_0^2 f(t) dt \\ &= \int_0^1 (t^2 - 7t) dt + \int_1^2 (-t^2 + 9t - 14) dt \\ &= \left[\frac{t^3}{3} - \frac{7t^2}{2} \right]_0^1 + \left[-\frac{t^3}{3} + \frac{9t^2}{2} - 14t \right]_1^2 \\ &= \left(\frac{1}{3} - \frac{7}{2} \right) + \left\{ \left(-\frac{8}{3} + 18 - 28 \right) - \left(-\frac{1}{3} + \frac{9}{2} - 14 \right) \right\} \\ &= -6 \end{aligned}$$

より、最小値は -6 である。

(答) 最小値 -6