

4

(1)

関数 $f(x) = \sin x + \tan x - 2x$ を微分すると、

$$f'(x) = \cos x + \frac{1}{\cos^2 x} - 2$$

となる。

$$(\text{答}) \quad f'(x) = \cos x + \frac{1}{\cos^2 x} - 2$$

また、 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ において、 $0 < \cos x < 1$ であるから、

$$f'(x) = \cos x + \frac{1}{\cos^2 x} - 2 > \cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x} - 2$$

となる。ここで、相加・相乗平均の性質より、

$$\cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x} - 2 \geq 2\sqrt{\cos^2 x \cdot \frac{1}{\cos^2 x}} - 2 = 0$$

が成立する。これより、区間 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ において $f'(x) > 0$ が成立するため、 $f(x)$ は区間

$0 < x < \frac{\pi}{2}$ において単調増加である。これより、 $f(x) > f(0)$ が成立する。ここで、

$$\begin{aligned} f(0) &= \sin 0 + \tan 0 - 2 \cdot 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

であるから、 $f(x) > f(0) = 0$ が成立する。以上より、区間 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ において $f(x) > 0$ である。

(証明終)

(2)

$p = e^{2x}$ と置換すると、 $\frac{dp}{dx} = 2e^{2x} = 2p$ かつ

x	0	→	1
p	1	→	e^2

であるから、与えられた定積分は、

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \frac{1}{(e^{2x} + a)(e^{-2x} + a)} dx \\ &= \int_1^{e^2} \frac{1}{(p+a)(p^{-1}+a)} \cdot \frac{dp}{2p} \\ &= \int_1^{e^2} \frac{1}{2(p+a)(1+ap)} dp \end{aligned}$$

となる。

[1] $a = 1$ のとき、

$$\begin{aligned} & \int_1^{e^2} \frac{1}{2(p+a)(1+ap)} dp \text{ を計算すると、} \\ & \int_1^{e^2} \frac{1}{2(p+a)(1+ap)} dp \\ &= \int_1^{e^2} \frac{1}{2(p+1)^2} dp \\ &= \left[-\frac{1}{2(p+1)} \right]_1^{e^2} \\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{2(e^2+1)} \end{aligned}$$

となる。

[2] $a \neq 1$ のとき、

$$\begin{aligned} & \int_1^{e^2} \frac{1}{2(p+a)(1+ap)} dp \text{ に対して部分分数分解を行うと、} \\ & \int_1^{e^2} \frac{1}{2(p+a)(1+ap)} dp \\ &= \frac{1}{2(1-a^2)} \int_1^{e^2} \left(\frac{1}{p+a} - \frac{a}{1+ap} \right) dp \\ &= \frac{1}{2(1-a^2)} \left[\log(p+a) - \log(1+ap) \right]_1^{e^2} \\ &= \frac{1}{2(1-a^2)} \log \left(\frac{e^2+a}{1+ae^2} \right) \end{aligned}$$

となる。

以上[1], [2]より、与えられた定積分 $\int_0^1 \frac{1}{(e^{2x} + a)(e^{-2x} + a)} dx$ は、

$$\begin{aligned} & a = 1 \text{ のとき } \frac{1}{4} - \frac{1}{2(e^2+1)} \\ & a \neq 1 \text{ のとき } \frac{1}{2(1-a^2)} \log \left(\frac{e^2+a}{1+ae^2} \right) \end{aligned}$$

である。

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} - \frac{1}{2(e^2+1)} \quad (a = 1) \\ (\text{答}) \quad & \frac{1}{2(1-a^2)} \log \left(\frac{e^2+a}{1+ae^2} \right) \quad (a \neq 1) \end{aligned}$$

(1)

y 軸に平行な直線は放物線 C_1 , C_2 に接することはない為、接線 ℓ_1 , ℓ_2 は実数 p , q を用いて、 $y = px + q$ と表せる。放物線 C_1 と直線 $y = px + q$ が接するため、2 つの関数を連立した方程式

$x^2 + 4ax + a^2 = px + q$ は重解を持つ。則ち、2 次方程式 $x^2 + (4a - p)x + (a^2 - q) = 0$ の判別式を

D_1 とすると、 $D_1 = 0$ となる。これを解くと、

$$\begin{aligned} D_1 &= 0 \\ \Leftrightarrow (4a - p)^2 - 4(a^2 - q) &= 0 \\ \Leftrightarrow p^2 - 8ap + 12a^2 + 4q &= 0 \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

となる。同様に、放物線 C_2 と直線 $y = px + q$ が接するため、2 つの関数を連立した方程式

$-x^2 + 4ax - a^2 = px + q$ は重解を持つ。則ち、2 次方程式 $x^2 - (4a - p)x + (a^2 + q) = 0$ の判別式を

D_2 とすると、 $D_2 = 0$ となる。これを解くと、

$$\begin{aligned} D_2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (4a - p)^2 - 4(a^2 + q) &= 0 \\ \Leftrightarrow p^2 - 8ap + 12a^2 - 4q &= 0 \quad \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

となる。①, ②より、 $q = 0$ が得られる。①と $q = 0$ より、

$$\begin{aligned} p^2 - 8ap + 12a^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (p - 2a)(p - 6a) &= 0 \\ \Leftrightarrow p &= 6a, 2a \end{aligned}$$

である。傾きの大きいものを ℓ_1 とするため、 a が正の実数であることを踏まえると、

$\ell_1: y = 6ax$, $\ell_2: y = 2ax$ となる。

(答) $\ell_1: y = 6ax$

$\ell_2: y = 2ax$

(2)

直線 ℓ_1 と x 軸がなす角のうち鋭角である方の大きさを α , 直線 ℓ_2 と x 軸がなす角のうち鋭角である方の大きさを β とおくと、 $\tan \alpha = 6a$, $\tan \beta = 2a$ が成り立つ。また、 $\theta = \alpha - \beta$ であり、

$a > 0$ より $0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$ が成立するから、 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ であるといえる。区間 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ において、

$\tan \theta$ は単調増加するため、

θ が最大値をとる $\Leftrightarrow \tan \theta$ が最大値をとる

が成立する。加法定理より、

$$\begin{aligned} \tan \theta &= \tan(\alpha - \beta) \\ &= \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} \\ &= \frac{6a - 2a}{1 + 6a \times 2a} \\ &= \frac{4}{\frac{1}{a} + 12a} \end{aligned}$$

である。ここで、 $a > 0$ であることから、相加相乗平均の性質より、

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} + 12a &\geq 2\sqrt{\frac{1}{a} \cdot 12a} = 4\sqrt{3} \\ \therefore \tan \theta &\leq \frac{4}{4\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

である。等号は

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} &= 12a \\ \Leftrightarrow a &= \frac{1}{2\sqrt{3}} \quad (\because a > 0) \end{aligned}$$

のときに確かに成立する。以上より、 θ が最大となるのは、 $a = \frac{1}{2\sqrt{3}}$ のときであり、このとき

$$\begin{aligned} \tan \theta &= \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \Leftrightarrow \theta &= \frac{\pi}{6} \left(\because 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \right) \end{aligned}$$

である。

(答) $\theta = \frac{\pi}{6}$

(1)

$$\begin{aligned}
& \arg \left\{ \frac{\left(\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}i \right) - 0}{(1+\sqrt{3}i) - 0} \right\} \\
&= \arg \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{\left\{ \left(\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}i \right) (1-\sqrt{3}i) \right\}}{(1+\sqrt{3}i)(1-\sqrt{3}i)} \right] \\
&= \arg \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{4\sqrt{2}+4\sqrt{2}i}{4} \right] \\
&= \arg \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i \right) \\
&= \arg \left\{ \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right\} \\
&= \frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

より、 $\angle AOB = \frac{\pi}{4}$ である。また、

$$\begin{aligned}
OA &= \sqrt{|1+\sqrt{3}i|^2} \\
&= \sqrt{1+3} \\
&= 2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
OB &= \sqrt{\left| \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}i \right|^2} \\
&= \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2} \right)^2} \\
&= \sqrt{\frac{8-4\sqrt{3}}{4} + \frac{8+4\sqrt{3}}{4}} \\
&= 2
\end{aligned}$$

である。

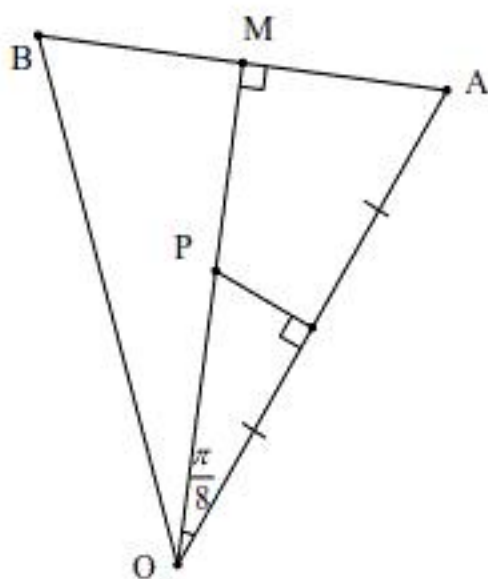
$$(\text{答}) \quad \angle AOB = \frac{\pi}{4}, \quad OA = 2, \quad OB = 2$$

(2)

AB の中点を点 M とおく。複素平面において点 M を表す複素数は、

$$\frac{1}{2} \left\{ (1+\sqrt{3}i) + \left(\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}i \right) \right\} = \frac{1}{2} \left(\frac{2+\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}+2\sqrt{3}+\sqrt{6}}{2}i \right)$$

である。 $\triangle OAB$ は $OA = OB$ である二等辺三角形であるので、対称性より $\triangle OAB$ の外心 P は直線 OM 上にある。点 O, A, B, P, M 及び点 P から辺 OA に下ろした垂線を、下図に示す。



ここで、 $OM = OA \cos \frac{\pi}{8} = 2 \cos \frac{\pi}{8}$, $OP = \frac{\frac{1}{2}OA}{\cos \frac{\pi}{8}} = \frac{1}{\cos \frac{\pi}{8}}$ であるから、

$$\begin{aligned}
\overline{OP} &= \frac{OP}{OM} \overline{OM} \\
&= \frac{\frac{1}{\cos \frac{\pi}{8}}}{2 \cos \frac{\pi}{8}} \overline{OM} \\
&= \frac{1}{2 \cos^2 \frac{\pi}{8}} \overline{OM} \\
&= \frac{1}{1 + \cos \frac{\pi}{4}} \overline{OM} \\
&= \frac{1}{1 + \frac{1}{\sqrt{2}}} \overline{OM} \\
&= (2 - \sqrt{2}) \overline{OM}
\end{aligned}$$

である。以上より、点 P を表す複素数は、

$$(2 - \sqrt{2}) \times \frac{1}{2} \left(\frac{2+\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}+2\sqrt{3}+\sqrt{6}}{2}i \right) = \frac{1+\sqrt{3}-\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-1}{2}i$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{1+\sqrt{3}-\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-1}{2}i$$