

(1)

まず, 曲線 $C_1: y = x^2$ および曲線 $C_2: y = \frac{a}{x+a}$ について, $y = x^2$ の定義域は実数全体であり,

$y = \frac{a}{x+a}$ の定義域は $x \neq -a$ である。 $x \neq -a$ において, 両式を連立すると,

$$\begin{aligned} x^2 &= \frac{a}{x+a} \\ \Leftrightarrow x^2(x+a) &= a \quad (\because x \neq -a) \\ \Leftrightarrow x^3 + ax^2 - a &= 0 \end{aligned}$$

を得る。以上より, 曲線 C_1, C_2 がちょうど2つの共有点を持つような a の値は,

$x^3 + ax^2 - a = 0$ が $x \neq -a$ においてちょうど2つの異なる実数解を持つような a の値に等しい。

$f(x) = x^3 + ax^2 - a$ とおくと,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 + 2ax \\ &= x(3x + 2a) \end{aligned}$$

であり, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{2a}{3}, 0$ である。 $a > 0$ より $-\frac{2}{3}a < 0$ であるから, $f(x)$ の増減表は以下

のようになる。

x	$\cdots$	$-\frac{2}{3}a$	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$f\left(-\frac{2}{3}a\right)$	$\searrow$	$f(0)$	$\nearrow$

$f(-a) = -a \neq 0$ ($\because a > 0$) であるから, 増減表より, $f(x) = 0$ がちょうど2つの異なる実数解を持つ条件は,

$$f\left(-\frac{2}{3}a\right) = 0 \text{ または } f(0) = 0$$

である。ここで, $a > 0$ より $f(0) = -a \neq 0$ であるから, $f(x) = 0$ がちょうど2つの異なる実数

解を持つとき, $f\left(-\frac{2}{3}a\right) = 0$ である。 $f\left(-\frac{2}{3}a\right) = 0$ のとき,

$$\begin{aligned} f\left(-\frac{2}{3}a\right) &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(-\frac{2}{3}a\right)^3 + a\left(-\frac{2}{3}a\right)^2 - a &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{4}{27}a^3 - a &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{4}{27}a\left(a^2 - \frac{27}{4}\right) &= 0 \\ \therefore a &= \frac{3\sqrt{3}}{2} \quad (\because a > 0) \end{aligned}$$

となる。以上より, 曲線 C_1, C_2 がちょうど2つの共有点を持つとき, $a = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ である。

$$(\text{答}) \quad a = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

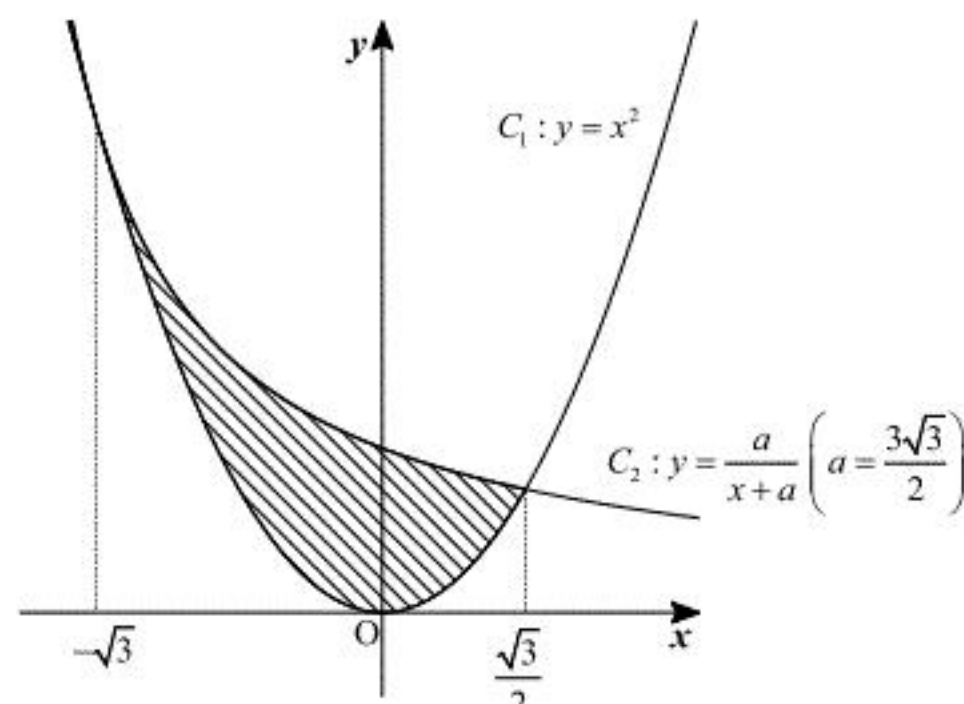
(2)

$a = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ のとき, $f(x)$ について,

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 + \frac{3\sqrt{3}}{2}x^2 - \frac{3\sqrt{3}}{2} \\ &= (x + \sqrt{3})^2 \left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \end{aligned}$$

であるから, 曲線 C_1, C_2 の交点の x 座標は, $-\sqrt{3}$ および $\frac{\sqrt{3}}{2}$ である。よって, 曲線 C_1 と C_2 のグ

ラフは下図の通りであり, 求める面積は斜線部の面積である。



$-\sqrt{3} \leq x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$ において $x + \frac{3\sqrt{3}}{2} > 0$ であることに注意して, 斜線部の面積は,

$$\begin{aligned} \int_{-\sqrt{3}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(\frac{\frac{3\sqrt{3}}{2}}{x + \frac{3\sqrt{3}}{2}} - x^2 \right) dx &= \left[\frac{3\sqrt{3}}{2} \log \left(x + \frac{3\sqrt{3}}{2} \right) - \frac{1}{3} x^3 \right]_{-\sqrt{3}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \\ &= \frac{3\sqrt{3}}{2} \left\{ \log(2\sqrt{3}) - \log\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \right\} - \frac{1}{3} \left\{ \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 - (-\sqrt{3})^3 \right\} \\ &= \frac{3\sqrt{3}}{2} \log 4 - \frac{1}{3} \left(\frac{3\sqrt{3}}{8} + 3\sqrt{3} \right) \\ &= 3\sqrt{3} \log 2 - \frac{9\sqrt{3}}{8} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad 3\sqrt{3} \log 2 - \frac{9\sqrt{3}}{8}$$

半径1の球に内接する正三角錐の頂点をA, B, C, Dとおき、底面が正三角形BCDであるとする。このとき、 $AB = AC = AD$ であり、 $BC = CD = DB$ である。正三角錐ABCDについて、 xyz 空間において、頂点A, B, C, Dは原点を中心とする半径1の球 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 上に存在し、点Aの座標を $(0, 0, 1)$ としても一般性を失わない。次に、 $AB = AC = AD$ について、これらを k (k は正の実数)とおき、さらに点B, C, Dの座標をそれぞれ (x_B, y_B, z_B) , (x_C, y_C, z_C) , (x_D, y_D, z_D) とおくと、 (x_B, y_B, z_B) について、

$$\begin{aligned} & \begin{cases} x_B^2 + y_B^2 + z_B^2 = 1 \\ AB = k \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x_B^2 + y_B^2 + z_B^2 = 1 \\ AB^2 = k^2 \quad (\because AB > 0, k > 0) \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x_B^2 + y_B^2 + z_B^2 = 1 \\ x_B^2 + y_B^2 + (1 - z_B)^2 = k^2 \end{cases} \\ & \therefore z_B = 1 - \frac{k^2}{2} \end{aligned}$$

が成立し、同様に、 $z_C = 1 - \frac{k^2}{2}$, $z_D = 1 - \frac{k^2}{2}$ が成立するから、 $z_B = z_C = z_D$ となる。よって、正三角形BCDを含む平面は、平面 $z = 0$ と並行であることが分かる。さらに、 $z_B = z_C = z_D$ について、これらを r ($-1 < r < 1$)とおくと、点B, C, Dは球 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 上の点だから、

$$\begin{cases} x_B^2 + y_B^2 = 1 - r^2 \\ x_C^2 + y_C^2 = 1 - r^2 \\ x_D^2 + y_D^2 = 1 - r^2 \end{cases}$$

が成立し、点B, C, Dは平面 $z = r$ において、 $(0, 0, r)$ を中心とする半径 $\sqrt{1 - r^2}$ の円上に存在することが分かる。つまり、正三角形BCDは半径 $\sqrt{1 - r^2}$ の円に内接し、その面積は

$$3 \left\{ \frac{1}{2} \left(\sqrt{1 - r^2} \right)^2 \sin \frac{2\pi}{3} \right\} = \frac{3\sqrt{3}}{4} (1 - r^2)$$

である。以上より、正三角錐ABCDは底面積 $\frac{3\sqrt{3}}{4} (1 - r^2)$ 、高さ $(1 - r)$ の三角錐である。正三角錐ABCDの体積を V とすると、 V は r ($-1 < r < 1$)を用いて

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{4} (1 - r^2) (1 - r) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} (1 - r^2) (1 - r) \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

と表せる。次に、

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dr} &= \frac{\sqrt{3}}{4} \{ -2r(1 - r) - (1 - r^2) \} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} (3r^2 - 2r - 1) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} (r - 1)(3r + 1) \end{aligned}$$

であるから、 $-1 < r < 1$ における V の増減表は下図のようになる。

r	(-1)	$\cdots$	$-\frac{1}{3}$	$\cdots$	(1)
$\frac{dV}{dr}$		$+$	0	$-$	
V		$\nearrow$	極大	$\searrow$	

増減表より、 $-1 < r < 1$ の範囲で V が最大となるのは、 $r = -\frac{1}{3}$ のときである。以上より、正三

角錐ABCDの体積の最大値は、①式に $r = -\frac{1}{3}$ を代入して、

$$\frac{\sqrt{3}}{4} \left\{ 1 - \left(-\frac{1}{3} \right)^2 \right\} \left\{ 1 - \left(-\frac{1}{3} \right) \right\} = \frac{8\sqrt{3}}{27}$$

である。

(1)

$$\frac{1}{\ell} + \frac{1}{m} - \frac{1}{3} = \frac{1}{n} \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\ell \geq 5, m \geq 5, n \geq 1 \quad \dots \textcircled{2}$$

整数 ℓ, m, n は①および②を満たす。背理法を利用して、整数 ℓ と m の少なくとも一方は5であることを示す。すなわち、 ℓ と m はどちらも5ではないと仮定して矛盾を導く。このとき、②より $\ell \geq 6$ かつ $m \geq 6$ であり、①式について

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} &= \frac{1}{\ell} + \frac{1}{m} - \frac{1}{3} \\ &\leq \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{3} \\ &= 0 \end{aligned}$$

となるが、 $\frac{1}{n} \leq 0$ であることは、 $n \geq 1$ であることと矛盾する。以上より、仮定は誤りであり、整数 ℓ と m の少なくとも一方は5であることが示された。

(証明終)

(2)

(1)の結果より、 $\ell=5$ または $m=5$ である。 $\ell=5$ のとき、①式より

$$\begin{aligned} \frac{1}{5} + \frac{1}{m} - \frac{1}{3} &= \frac{1}{n} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{m} &= \frac{1}{n} + \frac{2}{15} \quad \dots \textcircled{3} \end{aligned}$$

が成立し、 $n \geq 1$ であるから、 $\frac{2}{15} < \frac{1}{m} \leq \frac{17}{15}$ となり、 $\frac{15}{17} \leq m < \frac{15}{2}$ であることが分かる。さらに、 $m \geq 5$ とあわせて、 $m=5, 6, 7$ である。以下、 $m=5, 6, 7$ について場合分けをして考える。

[1] $m=5$ のとき

③式に $m=5$ を代入して

$$\begin{aligned} \frac{1}{5} &= \frac{1}{n} + \frac{2}{15} \\ \therefore n &= 15 \end{aligned}$$

となる。

[2] $m=6$ のとき

③式に $m=6$ を代入して

$$\begin{aligned} \frac{1}{6} &= \frac{1}{n} + \frac{2}{15} \\ \therefore n &= 30 \end{aligned}$$

となる。

[3] $m=7$ のとき

③式に $m=7$ を代入して

$$\begin{aligned} \frac{1}{7} &= \frac{1}{n} + \frac{2}{15} \\ \therefore n &= 105 \end{aligned}$$

となる。

[1], [2], [3]より、①および②を満たす解として

$$(\ell, m, n) = (5, 5, 15), (5, 6, 30), (5, 7, 105)$$

があることが分かる。また、式①は ℓ, m に関する対称式であるから、 ℓ, m を交換したもの、つまり、

$$(\ell, m, n) = (5, 5, 15), (6, 5, 30), (7, 5, 105)$$

も、①および②を満たす解として適当である。以上より、求める整数の組は、

$$(\ell, m, n) = (5, 5, 15), (5, 6, 30), (5, 7, 105), (6, 5, 30), (7, 5, 105)$$

である。

$$(\text{答}) \quad (\ell, m, n) = (5, 5, 15), (5, 6, 30), (6, 5, 30), (5, 7, 105), (7, 5, 105)$$